

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Методы статистического моделирования

Кафедра прикладной математики факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа

01.03.02-Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки

Математическое моделирование и вычислительная математика

Уровень высшего образования

Бакалавриат

Форма обучения

очная

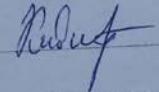
Статус дисциплины: базовая

Махачкала, 2017

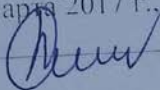
Рабочая программа дисциплины «Методы статистического моделирования» составлена в 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02-Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) от «12» марта 2015 г. №228.

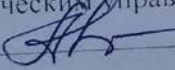
Разработчики:
кафедра прикладной математики, Назаралиев М.А., д. ф.-м. н., профессор.

Рабочая программа одобрена:
на заседании кафедры прикладной математики от «7» марта 2017 г., протокол №7

И. о. зав. кафедрой  Кадиев Р.И.

на заседании методического совета факультета математики и компьютерных наук от «10» марта 2017 г., протокол №4

Председатель  Меджидов З.Г.

Рабочая программа согласована с учебно-методическим управлением
28 03 2017 г. 

Рабочая программа дисциплины «Методы статистического моделирования» составлена в 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02-Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) от «12» марта 2015 г. №228.

.

Разработчики:

кафедра прикладной математики, Назаралиев М.А., д. ф.-м. н., профессор.

Рабочая программа одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от «7» марта 2017 г., протокол №7

И. о. зав. кафедрой _____ Кадиев Р.И.

на заседании методического совета факультета математики и компьютерных наук от «10» марта 2017 г., протокол №4

Председатель _____ Меджидов З.Г.

Рабочая программа согласована с учебно-методическим управлением

« » _____ 2017 г. _____

Рабочая программа дисциплины составлена в 2015 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.02-Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриат)
(код и наименование направления подготовки) (бакалавриата, специалитета, магистратуры)
от «12» марта 2015 г. № 228.

Разработчик(и): заведующий кафедрой ПМ профессор Назаралиев М.А.
(кафедра, ФИО, ученая степень, ученое звание)

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры _____ от «17» 04 2015 г., протокол № 8
Зав. кафедрой Назаралиев Назаралиев М.А.
(подпись)

на заседании Методической комиссии ММК факультета от
«19» мая 2015 г., протокол № 9.
Председатель Меджидов Меджидов З.Г.
(подпись)

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением «31» 08 2015 г. Аб
(подпись)

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина Методы статистического моделирования входит в базовую часть образовательной программы бакалавриата по направлению 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете М и КН кафедрой ПМ.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с моделированием случайных величин, изложением основ метода Монте – Карло и его использованием при решении различных прикладных задач.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: профессиональных - ПК-1, ПК-2, ПК-3, ПК-4, ПК-13.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, лабораторные занятия, самостоятельная работа).

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме индивидуальный опрос, тестирование, контроля текущей успеваемости – контрольная работа, коллоквиум, и промежуточный контроль в форме зачета и экзамена.

Объем дисциплины по учебному плану составляет **6** зачетных единиц (**216** часов), в том числе по видам учебных занятий

Се- местр	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)	
	в том числе							
	Все- го	Контактная работа обучающихся с преподавателем						СРС, в том числе экза- мен
		из них						
	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации			
7	108	18	18				72	Зачет
8	108	28	28				52	Экзамен
Итого	216	46	46				124	

1. Цели освоения дисциплины

- овладение студентами основами одного из современных универсальных численных методов решения сложных задач математической физики, техники, экономики и др., и методами моделирования случайных величин и процессов.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Методы статистического моделирования» читается на 4-ом курсе после изучения дисциплин «Теория вероятностей», «Математическая статистика», «Теория случайных процессов» и других общематематических дисциплин и является, таким образом, логическим продолжением в изучении вероятностных законов и их роли на практике.

В результате изучения курса студент должен овладеть теоретическими основами методов моделирования случайных величин и процессов, основами Метода Монте-Карло для решения дифференциальных и интегральных уравнений, больших систем алгебраических уравнений, для моделирования систем массового обслуживания, решения простых задач теории переноса и др.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения) .

ПК -1	Способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	<i>Знать:</i> современные методы получения и обработки информации. <i>Уметь:</i> использовать возможности интернет ресурсов и пакетов прикладных программ для решения научных и прикладных задач.
ПК-2	Способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<i>Знать:</i> методы математического моделирования различных прикладных задач, основы методов оптимизации, математической

		<p>статистики и др.</p> <p><i>Уметь:</i> осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности разработанных методов</p>
ПК-3	Способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности	<p><i>Знать:</i> основы принятия решений.</p> <p><i>Уметь:</i> на основе анализа результатов своей профессиональной деятельности критически ее осмыслить и принять нужные меры для ее улучшения или смены.</p>
ПК-4	Способность работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности	<p><i>Знать:</i> основы методов статистического моделирования.</p> <p><i>Уметь:</i> применять полученные знания для решения задач теории массового обслуживания, теории надежности, физики, химии и др.</p>
ПК-13	Способность применять существующие и разрабатывать новые методы и средства обучения.	<p><i>Знать:</i> Современный аппарат вычислительной математики.</p> <p><i>Уметь:</i> алгоритмизировать задачи, составить программу для ЭВМ, проводить расчеты и выбирать, таким образом, оптимальный метод решения задачи</p>

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия	Контроль самост. раб.		
Модуль 1. Моделирование случайных величин и процессов									
1.1	Случайные величины и их распределения	7	2					6	
1.2	Моделирование дис-	7	4			6		18	

	кретных случайных величин.							
	<i>Итого по модулю 1:</i>			6		6		24
	Модуль 2. Моделирование непрерывных случайных величин							
2.1	Стандартный метод моделирования непрерывных случайных величин.	7		2		2		12
2.2	Специальные методы моделирования непрерывных случайных величин.	7		4		4		12
	<i>Итого по модулю 2:</i>			6		6		24
	Модуль 3. Основы метода Монте-Карло.							
3.1	Предельные теоремы теории вероятностей	7		2				4
3.2	Статистическое оценивание параметров распределений. Общая схема метода Монте-Карло	7		4		6		20
	<i>Итого по модулю 3:</i>			6		6		24
	ИТОГО по 1 сем.:			18		18		64
4	Модуль 4. Вычисление определенных интегралов. Решение интегральных уравнений.							
4.1	Оценка интегралов методом Монте-Карло	8		6		8		3
4.2	Оценки функционалов от решения интегральных уравнений	8		4		2		3
4.3	Решение систем алгебраических уравнений	8		4		4		2
	<i>Итого по модулю 4:</i>			14		14		8
5	Модуль 5. Моделирование задач переноса излучений, методом Монте-Карло. Моделирование систем массового обслуживания.							
5.1	Общие сведения из теории переноса излучений.	8		2		2		2
5.2	Прямое моделирование процесса переноса излучений	8		4		4		2
5.3	Интегральное уравнение переноса. Оптимизация алгоритмов при решении задач переноса излу-	8		4		6		2

	чений							
5.4	Моделирование систем массового обслуживания	8		4		4		2
	<i>Итого по модулю 5:</i>			<i>14</i>		<i>14</i>		<i>8</i>
	<i>ИТОГО по II сем.:</i>			<i>28</i>		<i>28</i>		<i>16</i>
	<i>Подготовка к экзамену</i>	8						36
	ИТОГО:			46		46		88 36

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

Модуль 1. Моделирование случайных величин и процессов.

Тема 1. Случайные величины и их распределения.

1.1лк. Случайные величины и их распределения. Дискретные и непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность распределения числовые характеристики.

Равномерное в $(0,1)$ распределение вероятностей и его роль в моделировании других случайных величин. Методы получения случайных величин, распределенных равномерно в $(0,1)$.

Тема 2. Моделирование дискретных случайных величин.

1.2. лк. Стандартный метод моделирования дискретных случайных величин. Примеры моделирования: биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое и гипергеометрическое распределения.

1.3лк. Эффективность стандартного алгоритма. Нестандартные методы в моделировании ДСВ. Специальные методы моделирования основных ДСВ.

Модуль 2. Моделирование непрерывных случайных величин.

Тема 1. Стандартный метод моделирования непрерывных случайных величин.

2.1лк. Моделирование непрерывных случайных величин (НСВ). Стандартный метод . Примеры моделирования некоторых распределений: равномерное распределение, показательные распределения; моделирование распределений, с таблично заданной плотностью распределений.

Тема 2. Специальные методы моделирования НСВ.

2.2лк. Метод суперпозиции и метод исключения для моделирования НСВ. Моделирование изотропного вектора на плоскости и в пространстве. Примеры моделирования.

2.3лк. Моделирование γ и β – распределений. Моделирование стандартной нормальной случайной величины. Приближенное моделирование нормальной случайной величины на основе центральной предельной теоремы.

Модуль 3. Основы метода Монте – Карло.

Тема 1 . Предельные теоремы теории вероятностей.

3.1лк. Неравенство Чебышева. Правило «3-х сигм». Закон больших чисел: Теоремы Чебышева, Бернулли, Пуассона, Хинчина. Центральная предельная теорема теории вероятностей.

Тема 2. Статистическое оценивание параметров распределений. Общая схема метода Монте-Карло.

3.2лк. Статистическая оценка параметров распределений. Точечные и интервальные оценки, свойства оценок. Статистические оценки для математического ожидания, дисперсии, коэффициента корреляции и др.

3.3лк. Общая схема метода Монте – Карло (М-К) для оценки неизвестного математического ожидания. Погрешность метода М-К. Сведение задачи об определении некоторой величины к вычислению средних значений. Задачи метода Монте – Карло. Примеры вычисления площади сложной фигуры и определенного интеграла, вероятности вылета элементарной частицы через плоскую пластику.

Модуль 4. Вычисление определенных интегралов. Решение интегральных уравнений.

Тема 1. Оценка интегралов методом Монте-Карло.

4.1лк. Вычисление многократных интегралов методом М-К. вычисление интеграла, как площади. Вычисление интеграла, как среднего значения. Оценка погрешности, построение доверительного интервала.

4.2.лк. Методы понижения дисперсии оценок при вычислении интегралов. Метод существенной выборки (выборки по важности). Алгоритм с нулевой дисперсией.

4.3лк. Выделение «главной» части интегрируемой функции. Метод математических ожиданий и метод расщепления. Сравнение дисперсий оценок интеграла разными способами.

Тема 2. Оценки функционалов от решения интегральных уравнений.

4.4лк. Решение интегральных уравнений методом М-К. Некоторые сведения из теории интегральных уравнений. Интегральное уравнение 2-го рода. Сопряженное пространство и сопряженное уравнение. Функционалы от решения интегрального уравнения. Ряд Неймана, условия сходимости.

4.5лк. Цепи Маркова. Однородные цепи Маркова. Переходная плотность. Связь цепей Маркова с решением интегральных уравнений методом М-К. Основная оценка функционала от решения интегрального уравнения, её несмещенность. Дисперсия основной оценки.

Тема 3. Решение систем алгебраических уравнений.

4.6лк. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Точные и итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости. Связь с интегральными уравнениями.

4.7лк. Построение цепи Маркова для решения СЛАУ методом М-К. Описание алгоритма метода М-К для решения СЛАУ. Возможность оценки отдельно выделенных компонентов решения. Преимущества и недостатки.

Модуль 5. Моделирование задач переноса излучений. Моделирование систем массового обслуживания.

Тема 1. Общие сведения из теории переноса излучений.

5.1 лк. Общие сведения из теории переноса излучений. Физические величины, участвующие в описании процесса переноса (коэффициенты рассеяния и поглощения, индикатриса и матрица рассеяния, функция пропускания, альбедо и др. Интегро – дифференциальное уравнение переноса. Характеристики поля излучения (поток, плотность, интенсивность и др.).

Тема 2. Прямое моделирование процесса переноса излучений.

5.2 лк. Процесс переноса, как Марковская цепь траекторий движения частиц излучения. Распределения вероятностей элементов траекторий. Моделирование элементов траекторий. Прямое моделирование процесса переноса.

5.3 лк. Общая схема моделирования процесса переноса методом М-К. Различные способы моделирования длины пробега в сложных областях: сферическая геометрия, геометрия ядерного реактора, взаимопересекающиеся эллипсоиды и др. Методы максимального сечения и минимальных длин моделирования длины пробега. Использование специального метода моделирования показательного закона.

Тема 3. Интегральное уравнение переноса. Оптимизация алгоритмов при решении задач переноса излучений.

5.4 лк. Интегральное уравнение переноса. Сопряженное уравнение переноса. Локальные по направлению оценки для плоского слоя. Оценки сопряженных блужданий.

5.5 лк. Оптимизация методов М-К в задачах переноса излучений. Весовые методы. Модификации моделирования длины пробега. Методы зависимых испытаний и подобных траекторий. Оценка функции ценности и их использование в оптимизации методов М-К.

Тема 4. Моделирование систем массового обслуживания.

5.6 лк. Системы массового обслуживания (СМО). Классификация систем массового обслуживания. Показатели работы СМО. Потоки заявок и его характеристики. Пуассоновский поток.

5.7 лк. Методы расчета СМО. Граф состояний. Задание основных параметров системы. Моделирование СМО методом М-К. Моделирование потока заявок. Моделирование времени обслуживания. Вычисление основных характеристик эффективности работы СМО.

5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела.

Параллельно материал транслируется на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации слайд-презентаций). В процессе преподавания дисциплины при чтении лекций применяются такие виды лекций, как вводная обзорная лекция, проблемная лекция, лекция визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

При выполнении лабораторных работ используются интернет ресурсы, пакеты прикладных программ СТАТИСТИКА, MathCAD и Matlab. Для проведения таких занятий используется имеющиеся на факультете 4 компьютерных класса.

На кафедре имеются методические указания к выполнению лабораторных работ, в библиотеке ДГУ есть необходимая литература, имеются методические разработки, размещенные в Интернет сайте ДГУ.

При кафедре прикладной математики функционирует студенческая научно-исследовательская лаборатория «Математическое моделирование, оснащенная 5 новыми ПК, презентационной и оргтехникой.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Ряд учебных и учебно-методических изданий, которые могут быть использованы при самостоятельной работе студентов приведены в разделах 8 и 9 настоящей Программы.

Подробное описание содержания и требований к выполнению лабораторных заданий, в частности, тем для домашнего выполнения содержатся в разделе 7.3.5 настоящей Программы.

Кроме этого при выполнении самостоятельной работы рекомендуются:

1. Назаралиев М.А., Гаджиева Т.В., Фаталиев Н.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Часть 1: Теория вероятностей: учебное пособие. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2014. – 192 с.; Часть II. Математическая статистика. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2015. – 155 с.

2. Назаралиев М.А., Магомедов И.И. Лабораторные задания по математической статистике: методическое пособие. Махачкала: Изд. ДГУ, 2013. – 32 с.

6.1 Задачи и примеры для самостоятельного решения

1. Найти моделирующую формулу для случайной величины с плотностью распределения $f(x) = c(1+x)$, $0 < x \leq 1$.

2. Написать алгоритм моделирования 5 значений случайной величины ξ - числа очков при бросании игральной кости.

3. Написать алгоритм моделирования 4 значений случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$.

4. Получить моделирующую формулу стандартного метода для случайной величины ξ с плотностью распределения

$$f(x) = ce^{-3/2x}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

5. Получить формулу моделирования стандартного для случайной величины с плотностью распределения $f(x) = ce^{-5x}$, $0 \leq x \leq l$.

6. Написать формулу моделирования для случайной величины с плотностью распределения $f(x) = c|\sin x|$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

7. Написать алгоритм метода исключения для случайной величины с плотностью распределения $f(x) = cx^{5/3}e^{-x}$, $0 < x$.
8. Написать формулу моделирования для случайной величины с плотностью распределения $f(x) = c/(1 + 2x)^2$, $0 \leq x \leq 1$.
9. Методом суперпозиции найти моделирующие формулы для случайной величины с плотностью распределения

$$f(x) = 1 - \frac{1}{3}(2e^{-2x} + e^{-3x}), \quad 0 < x < \infty.$$

10. Двумерная дискретная случайная величина задана законом распределения

τ	ξ		
	$x_1 = 0,1$	$x_2 = 0,4$	$x_3 = 0,7$
1	0,2	0,3	0,1
2	0,16	0,18	0,06

Найти условные законы распределения $P(\tau_j / x_i)$. Написать алгоритм моделирования значений двумерного вектора (ξ, τ) .

11. Получить формулы моделирования двумерного случайного вектора (ξ, τ) с плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = c\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

12. Найти формулы моделирования двумерного случайного вектора с плотностью распределения $f(x, y) = cx \cdot y^2$, в области, ограниченной прямыми: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

13. Получить формулы моделирования двумерной случайной величины (ξ, τ) с плотностью распределения $f(x, y) = cy$ в области ограниченной прямыми $y = 0, y = x, x = 1$.

14. Написать алгоритм и программу получения псевдослучайных чисел методом серединных квадратов Неймана. Получить 10 значений таких псевдослучайных чисел.

15. Вычислить методом Монте – Карло интеграл

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

а) как площади; б) используя в качестве плотности распределения $f(x)$ - плотность равномерного распределения в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$; в) при $f(x) = cx$ (сначала определить постоянную c).

16. Оценка интеграла из примера (15) при условии пункта б) имеет вид

$$I^* = \pi/2 \cdot \sum_{i=1}^n \sin \xi_i / n, \text{ где } \xi_i - \text{случайные числа, равномерно распределенные в интервале } (0, \frac{\pi}{2}).$$

Найти минимальное число испытаний, при котором верхняя граница ошибки $\delta = 0,05$.

17. Вычислить методом Монте – Карло определенный интеграл

$$I = \int_0^2 e^x dx$$

беря в качестве вспомогательной плотность распределения $f(x) = c(1+x)$, $0 \leq x \leq 2$. Сначала определить постоянную c .

18. Написать алгоритм вычисления методом Монте – Карло площади круга, вписанного в квадрат с вершинами $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.

19. Определить приближенное значение числа π с помощью алгоритма задачи (18). Найти такие приближения при различных значениях числа испытаний $n = 100; 10^4; 10^5; 10^6$.

20. В классической задаче Бюффона на геометрические вероятности на разграфленную параллельными линиями поверхность бросается игла длины $l < L$, где L - расстояние между параллельными линиями. Методом Монте – Карло оценить вероятность пересечения иглой какой - либо параллельной линии. Сравнить с точным решением при различных значениях числа испытаний n .

21. Имеется отрезок длины L , на которую случайно ставится две точки x и y . Оценить методом Монте – Карло вероятность построения треугольника из полученных 3-х отрезков. Сравнить с точным решением при различных значениях числа испытаний n .

22. Игра в спортлото. Для участия в этой игре нужно было выбрать (вычеркнуть) 6 номеров из 49 (различных спортивных соревнований). Написать алгоритм случайного выбора (вычеркивания) 6 видов спорта из 49, перенумерованных от 1 до 49.

23. Задача Гюйгенса (Классическая задача теории вероятностей о «разорении игрока»): два игрока A и B продолжают некоторую игру до полного разорения одного из них. Оценить методом Монте – Карло вероятности разорения для каждого игрока, если: 1) начальные капиталы у них соответственно равны a и b рублям, 2) вероятности выигрыша в каждой партии равны соответственно p и q ; 3) выигрыши в каждой партии составляет 1 руб. для одного (для другого, очевидно, проигрыш в 1 руб.).

Значения a, b, p, q выбрать разные. (Например $a=100, b=200, p=0,6; q=0,4$).

6.2. Темы рефератов. Распределение по модулям и разделам.

Раздел дисциплин	Тема реферата
1. Модуль 1. Моделирование случайных величин.	
1.1. Случайные величины и их распределения.	<u>Реферат:</u> История создания метода статистического моделирования. <u>Реферат:</u> Моделирование классической задачи теории вероятностей – задачи Банаха «о спичечных коробках».
1.2. Моделирование дискретных случайных величин.	<u>Реферат:</u> Первые работы по методу Монте-Карло, опубликованные в США и СССР. <u>Реферат:</u> Вычисление площадей фигур методом Монте-Карло. Моделирование классической задачи теории вероятностей – «задачи о встрече».
2. Модуль 2. Моделирование непрерывных случайных величин.	
2.1. Стандартный метод моделирования непрерывных случайных величин.	<u>Реферат:</u> Приближенное моделирование нормальности $N(0,1)$ распределения.
2.2. Специальные методы моделирования непрерывных случайных величин.	<u>Реферат:</u> Основные проблемы метода Монте-Карло. О точности метода.
3. Модуль 3. Основы метода Монте-Карло.	
3.1. Предельные теоремы теории вероятностей.	<u>Реферат:</u> Первые работы по методу Монте-Карло, опубликованные в США и СССР.
3.2. Статистическое оценивание параметров распределений. Общая схема метода Монте-Карло.	<u>Реферат:</u> Вычисление площадей фигур методом Монте-Карло. Моделирование классической задачи теории вероятностей – «задачи о встрече».
Модуль 4. Вычисление определенных интегралов. Решение интегральных уравнений.	
4.1. Оценка интегралов методом Монте-Карло.	<u>Реферат:</u> Основные проблемы метода Монте-Карло. О точности метода.
4.2. Оценки функционалов от решения интегральных уравнений.	<u>Реферат:</u> Цепи Маркова. Перенос излучения, как марковская цепь движения частиц от столкновения к столкновению с элементами вещества среды.
4.3. Решение систем алгебраических уравнений.	<u>Реферат:</u> Задачи теории систем массового обслуживания (СМО). Моделирование простой СМС методом Монте-Карло.
Модуль 5. Моделирование задач переноса излучений методом Монте-Карло. Моделирование систем массового обслуживания.	
5.1. Прямое моделирование процесса переноса излучений.	<u>Реферат:</u> Цепи Маркова. Перенос излучения, как марковская цепь движения частиц от столкновения к столкновению с элементами вещества среды.
5.2. Интегральное уравнение переноса. Оптимизация алго-	<u>Реферат:</u> Общая схема моделирования переноса излучения методов М–К.

ритмов при решении задач переноса излучений.	
5.3. Моделирование систем массового обслуживания.	Реферат: Основные проблемы метода Монте-Карло. О точности метода.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ПК-1 Способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям.	<i>Знать:</i> современные методы получения и обработки информации. <i>Уметь:</i> использовать возможности интернет ресурсов и пакетов прикладных программ для решения научных и прикладных задач.	Лекции, практические и лабораторные занятия. Контрольные работы, коллоквиумы, тестирование. Контрольные работы.
ПК-2 Способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	<i>Знать:</i> методы математического моделирования различных прикладных задач, основы методов оптимизации, математической статистики и др. <i>Уметь:</i> осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности разработанных методов.	Лекции, практические и лабораторные занятия. Контрольные работы, коллоквиумы, тестирование. Контрольные работы.
ПК-3 Способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной дея-	<i>Знать:</i> основы принятия решений. <i>Уметь:</i> на основе анализа результатов своей профессиональной деятельности критически ее осмыслить и принять нужные меры для ее улучшения или смены.	Лекции, практические и лабораторные занятия. Контрольные работы, коллоквиумы, тестирование. Контрольные работы.

тельности		
ПК - 4 Способность работать научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности.	<i>Знать:</i> основы методов статистического моделирования. <i>Уметь:</i> применять полученные знания для решения задач теории массового обслуживания, теории надежности, физики, химии и др	Лекции, практические и лабораторные занятия. Контрольные работы, коллоквиумы, тестирование. Контрольные работы.
ПК-13 Способность применять существующие и разрабатывать новые методы и средства обучения.	<i>Знать:</i> современный аппарат вычислительной математики. <i>Уметь:</i> алгоритмизировать задачи, составить программу для ЭВМ, проводить расчеты и выбирать, таким образом, оптимальный метод решения задачи	Лекции, практические и лабораторные занятия. Контрольные работы, коллоквиумы, тестирование. Контрольные работы.

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

ПК-1

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований, необходимые для формирования выводов по соответствующим научным исследованиям» (приводится содержание компетенции из ФГОС ВО)

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<i>Знать:</i> основные точные и итерационные методы решения СЛАУ, численные методы решения ДУ; методы математической статистики по сбору и анализу данных. <i>Уметь:</i> доказывать основополагающие теоремы и утверждения из математического анализа, теории функций, теории	Демонстрирует слабые знания по основным дисциплинам кафедры: численные методы, теория вероятностей, математическая статистика, методы оптимизации; не умеет точно	Показывает хорошие знания и умения в указанной для получения «удовлетв.» оценки графе (см. слева) областях. Однако допускает некоторые неточности при формулировке теорем и их	В дополнение к знаниям и умениям, необходимым для получения оценки «хорошо», умеет четко ставить задачу, сформулировать и находить

	вероятностей.	сформулировать задачу; не владеет в полной мере методами сбора и обработки информации – методами математической статистики; неуверенно отвечает на вопросы по использованию современных ППП для решения поставленной задачи.	доказательстве. Владеет интернет технологиями сбора и обработки информации.	наиболее оптимальный способ ее решения. Без ошибок умеет доказывать основные теоремы по численным методам, методам оптимизации, теории вероятностей, а также другим общематематическим дисциплинам. Хорошо владеет современными информационными методами сбора и анализа данных, умеет по ним принимать нужные решения.
--	---------------	--	---	---

ПК-2

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<i>Знать:</i> основные положения теории вероятностей и математической статистики, методы статистического моделирования; основы методов оптимизации и исследования операций. <i>Уметь:</i> использовать полученные знания по численным методам и мето-	Имеет неполное представление об основополагающих законах теории вероятностей – законе больших чисел и центральной предельной теореме; не умеет четко поставить	Умеет без ошибок сформулировать основные теоремы по дисциплинам специализации: численным методам, методам оптимизации,	В дополнение к умениям, необходимым для получения оценки «хорошо», умеет без ошибок и уверенно доказывать

	дам математического моделирования для решения практических задач физики, химии, биологии и техники.	задачу, допускает ошибки при формулировке теорем по численным методам; показывает слабые знания по другим общематематическим дисциплинам.	математической статистике. Однако при доказательстве допускает некоторые неточности. Умеет подобрать оптимальный метод решения поставленной задачи.	основные теоремы по специальным предметам, умеет доказательно подобрать оптимальные подходы к решению прикладных задач; хорошо владеет современными способами сбора и обработки информации, используя при этом новые интернет-возможности.
--	---	---	---	--

...ПК-3

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность критически переосмысливать накопленный опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<i>Знать:</i> алгоритмические языки программирования; методы достижения заданной точности решения прикладных задач. <i>Уметь:</i> находить оптимальные алгоритмы решения поставленных задач; на основе анализа полученных на ЭВМ численных результатов и их анализа совершенствовать математическую модель задачи и, соответственно, методы	Демонстрирует слабое умение осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности разработанных методов. Показывает слабые знания по алгоритми-	Может осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности разработанных методов. Показывает хорошие знания по современным методам получения ин-	Кроме указанных знаний и умений для получения оценки «хорошо», умеет в доказательной форме отстаивать верность принятого решения. Умеет четко

	ее решения.	ческим языкам программирования, по способам получения, обработки информации на основе Интернет-технологий и принятия по ним необходимых решений.	формации; умеет на основе их анализа принимать необходимые решения.	сформулировать алгоритм решения поставленной задачи, подобрать наиболее эффективный метод его решения. Может эффективно осуществлять постановку задач и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности разработанных методов
--	-------------	--	---	--

...ПК-4

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<i>Уметь:</i> работать с современными компьютерными сетями, в частности, использовать в своей работе возможности общения в сети «Интернет» для получения и обмена информацией; ясно и доходчиво излагать свои мысли как в устной, так и в письменной форме.	Имеет неполные знания по методам математического моделирования различных задач, на основе применения современных компьютерных технологий.	Показывает хорошие знания и умения в использовании возможностей получения информации с помощью Интернет; умеет использовать эти данные в своей профессиональной деятельности,	Кроме знаний и умений, необходимых для получения оценки «хорошо», умеет доказательно отстаивать свою точку зрения; умеет убеждать членов коллектива в

			умеет ясно и доходчиво высказывать свои мысли в коллективе, на семинарах и совещаниях.	правильности принятых методов решения задач.
--	--	--	--	--

...ПК-13

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность применять существующие и разрабатывать новые методы и средства обучения».

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<p><i>Уметь:</i> пользоваться современными пакетами прикладных программ MathCAD и Matlab, «Statistica» и текстовыми редакторами; составлять тестовые материалы и обучающие программы.</p> <p><i>Знать:</i> основы педагогики и психологии.</p> <p><i>Владеть:</i> навыками использования современных информационных технологий в обучении: online-тестирования, интерактивной доски, презентационного оборудования.</p>	Показывает слабые знания по методам вычислений, по математической статистике и другим прикладным дисциплинам. Имеет слабые познания по использованию пакетов прикладных программ Matlab, MathCAD, Statistica и текстовым редакторам.	Показывает хорошие знания по современным пакетам прикладных программ Matlab, MathCAD и другим. Может использовать их при решении прикладных задач.	Кроме указанных знаний и умений, необходимых для получения оценки «хорошо», показывает отличные знания в предметной области, хорошо владеет теоретическими знаниями по дисциплинам специализации по направлению подготовки 01.03.02.

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительная оценки по дисциплине быть не может.

7.3. Типовые контрольные задания.

7.3.1. Примеры контрольных работ.

Контрольная работа №1 (вариант).

1. Написать формулу моделирования непрерывной случайной величины, равномерно распределить в интервале $(-2,4)$.
2. Получить 5 значений дискретной случайной величины, заданной законом распределения

ξ	0	1	2	3	4
P_i	0,10	0,25	0,20	0,30	0,15

Значения случайной величины α , распределенной равномерно в интервале $(0,1)$, пусть заданы:

$$\alpha_1 = 0,13, \alpha_2 = 0,015, \alpha_3 = 0,423, \alpha_4 = 0,911, \alpha_5 = 0,722.$$

3. Написать алгоритм метода исключения для моделирования непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения $f(x) = cx^2, 0 \leq x \leq 3$.
4. Случайная величина ξ - число появления события A в 5 независимых испытаниях с вероятностью появления события A в каждом испытании, равной 0,4.

Составить ряд распределения ξ и написать алгоритм ее моделирования.

5. Двумерный случайный вектор (ξ, τ) задан следующим законом распределения:

τ	ξ		
	$x_0 = 0$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$
1	0,02	0,14	0,28
2	0,02	0,18	0,36

Пусть ξ и τ – независимы.

Написать алгоритм моделирования этого случайного вектора.

Контрольная работа №2

1. На основе центральной предельной теоремы написать формулу приближенного моделирования нормальной случайной величины ξ с параметрами 0 и 1: $N(0,1)$.
2. Для оценки некоторой величины m методом Монте - Карло проведено $n = 100$ испытаний. Найти с надежностью 0,99 оценку погрешности метода, если известно, что $\sigma^2 = D\xi = 0,6$, а $m = M\xi$
3. Плотность совместного распределения непрерывного двумерного вектора (ξ, τ) имеет вид: $f(x, y) = \frac{3}{4}xy^2$ в области D , ограниченный прямыми $x = 0, y = 0, x = 1, y = 2$. Показать, что с.в. ξ и τ независимы. Написать формулы стандартного метода моделирования для ξ и τ .
4. Написать общую схему вычисления интеграла, как площади:

$$I = \int_0^3 x^2 dx$$

5. Найти оценку интеграла

$$I = \int_0^1 e^{2x} dx, \text{ как среднего значения подынтегральной функции.}$$

Контрольная работа №3

1. Пусть методом Монте – Карло оценивается некоторая величина $m = M\xi$; по плотности распределения $f(x)$ путем моделирования получены n значений ξ . Написать выражение для оценки дисперсии оценки m .

2. Интеграл $I = \int_0^1 e^x dx$ оценивается методом Монте – Карло, как среднее

значение подынтегральной функции: $I = M\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{\alpha_i}\right)$. Найти дис-

персию этой оценки.

3. Написать алгоритм вычисления интеграла $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$, как площади.

4. Получить формулу стандартного метода для моделирования случайной величины ξ с плотностью распределения

$$f(x) = c(1 + x^2). \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Контрольная работа №4

1. Написать формулу способа «выделения главной части» для вычисления

интеграла $I = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

2. Написать алгоритм метода исключения для моделирования непрерывной случайной величины ξ с плотностью

$$f(x) = c(1 + x). \quad 1 \leq x \leq 3.$$

3. Из точки $x=0$ двигается частица по оси ox , делая шаг, равный 1 см, вправо с вероятностью $p=0,6$ и влево с вероятностью $q=0,4$, в каждой точке. В точках $x=-5$ и $x=10$ расположены отражающие экраны. Написать алгоритм метода Монте – Карло для определения положения частицы после n шагов.

4. Имеется одноканальная система массового обслуживания, в который поступает пуассоновский поток заявок. Время между двумя последовательными заявками распределено по показательному закону: $f(t) = 0,3e^{-0,3t}$, $0 < t < \infty$. Время обслуживания каждой заявки постоянно и равно $\tau = 1$ мин. Написать алгоритм метода Монте – Карло для оценки числа обслуженных заявок за время $T=30$ мин.

7.3.2 Вопросы для самоконтроля и к зачету

1. Виды случайных величин. Какие случайные величины называются дискретными? Какие случайные величины называются непрерывными?
2. Основные дискретные случайные величины: Бернулли, биномиальное, геометрическое, гипергеометрическое, Пуассоновское распределения. Где применяются?
3. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретных случайных величин из п.2.
4. Непрерывные случайные величины. Основные распределения: равномерное в интервале (a,b) , равномерное в $(0,1)$; показательное, нормальное распределения. Применения. Функция распределения и плотность распределения.
5. Числовые характеристики: $M\xi$ и $D\xi$, моменты, коэффициенты корреляции.
6. Многомерные случайные величины. Независимость случайных величин.
7. Законы больших чисел.
8. Центральная предельная теорема теории вероятностей.
9. История возникновения метода Монте-Карло.
10. Общая схема метода статистических испытаний метода Монте-Карло.
11. Задача моделирования случайных величин. Роль равномерной в $(0,1)$ случайной величины.
12. Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины.
13. Специальные методы моделирования дискретно- равномерного и геометрического распределений.
14. Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины.
15. Алгоритм моделирования кусочно - постоянной и кусочно-линейной плотностей.
16. Метод исключения моделирования СВ.
17. Метод рандомизации моделирования.
18. Моделирование плотности $f(x) = 3 \cdot (1 + x^2)/8$, $-1 \leq x \leq 1$.

19. Моделирование гамма и бета- распределений методом исключения.
20. Приближенное моделирование нормального распределения.
21. Моделирование нормального распределения.
22. Моделирование показательного распределения.
23. Моделирование изотропного вектора на плоскости.
24. Моделирование изотропного вектора в пространстве.
25. Методы получения псевдослучайных чисел.
26. Задача статистического оценивания неизвестных параметров распределения. Точечные и интервальные оценки.
27. Свойства оценок.
28. Погрешность метода статистических испытаний.
29. Задача оптимизации алгоритмов метода М-К.
30. Общие принципы построения алгоритмов и программ решения различных задач методом М-К.

7.3.3 Вопросы для самоконтроля и к экзамену.

К вопросам п. 7.3.2 добавляются следующие:

1. Вычисление определенного интеграла методом М-К, как площади.
2. Вычисление определенного интеграла методом М-К, как среднего значения подынтегральной функции.
3. Методы понижения дисперсии оценок интеграла. Алгоритм с нулевой дисперсией.
4. Метод существенной выборки.
5. Метод выделения главной части.
6. Сравнение дисперсий оценок п.п. 1,2,3,4 при вычислении простого интеграла и при выборе в качестве вспомогательной плотности распределения плотности равномерной в $(0,1)$ случайной величины.
7. Интегральное уравнение II –рода.
8. Интегральное уравнение переноса излучений .
9. Оценка функционалов от решения интегрального уравнения методом

- Монте-Карло (М-К).
10. Дисперсия оценки функционалов.
 11. Метод зависимых испытаний.
 12. Моделирование по «ценности».
 13. Рандомизация оценок метода М-К.
 14. Метод Монте-Карло и задачи переноса излучений. История.
 15. Оптические параметры среды (коэффициенты рассеяния и поглощения, индикатриса рассеяния).
 16. Уравнение переноса.
 17. Процесс переноса излучения - как цепь Маркова. Распределения вероятностей для элементов траекторий. Плотность столкновений; поток фотонов.
 18. Описание моделирования процесса переноса методом Монте-Карло
 19. Моделирование элементов траекторий частиц.
 20. Пример: перенос излучения через плоскую среду
 21. Методы максимального сечения и минимальных длин для моделирования длины пробега
 22. Интегральное уравнение переноса. Сопряженное уравнение переноса.
 23. Локальные оценки
 24. Весовые методы. Модификации моделирования длины пробега
 25. Моделирование сопряженных траекторий. Основные оценки.
Преимущества и недостатки.
 26. Применение метода М-К для оценки качества и надежности системы.
 27. Описание простейшей системы массового обслуживания. Виды СМО.
 28. Поток Пуассона. Моделирование моментов поступления заявок.
 29. Моделирование СМО методом М-К.
 30. Моделирование СМО с отказами и очередями.

7.3.4. Темы практических и семинарских занятий.

Практические и семинарские занятия по курсу не предусмотрены.

7.3.5. Темы рефератов.

1. История создания метода статистического моделирования. Идея метода.
2. Первые работы по методу Монте-Карло, опубликованные в США и СССР.
3. Закон больших чисел и центральная предельная теорема – основы метода Монте-Карло.
4. Основные проблемы метода Монте-Карло. О точности метода.
5. Сведения задачи вычисления определенного интеграла к оценке математического ожидания некоторой случайной величины.
6. Приближенное моделирование нормальности $N(0,1)$ распределения.
7. Вычисление площадей фигур методом Монте-Карло. Моделирование классической задачи теории вероятностей – «задачи о встрече».
8. Приближенное вычисление числа π методом Монте-Карло.
9. Моделирование классической задачи Банаха «О спичечных коробках».
10. Задачи теории систем массового обслуживания (СМО). Моделирование простой СМС методом Монте-Карло.
11. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Вычисление методов М–К определенных компонент решения.
12. Цепи Маркова. Перенос излучения, как марковская цепь движения частиц от столкновения к столкновению с элементами вещества среды.
13. Общая схема моделирования переноса излучения методов М–К.

7.3.6. Лабораторные работы

Тема: Моделирование случайных величин.

Лабораторная работа №1

Моделирование дискретных случайных величин.

Теоретическая часть.

- 1) Основные дискретные распределения: биномиальное распределение, геометрическое распределение, распределение Пуассона, гипергеометрическое распределение. Дать определения, написать выражения для функции распределения, привести числовые характеристики и характеристические функции.
- 2) Равномерное распределение в $(0,1)$ и его роль при моделировании других случайных величин.
- 3) Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины.
- 4) Специальные методы моделирования для перечисленных выше распределений.
- 5) Статистические характеристики выборки \bar{X} , S^2 , эмпирическая функция распределения.
- 6) Построение гистограммы распределения по выборочным данным x_1, x_2, \dots, x_n .

Задание 1:

1) Написать алгоритм, блок-схему и программу стандартного метода для моделирования случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = 2$.

2) Написать алгоритм, блок-схему и программу специального метода с использованием рекуррентной формулы для вычисления P_{k+1} при условиях п.1).

3) Получить n значений x_1, x_2, \dots, x_n . по алгоритму п.2). Вычислить \bar{X} , S^2 и сравнить их с точными значениями $M\xi$ и $D\xi$ распределения Пуассона.

4) Построить эмпирическую функцию $F_n(x)$ распределения и сравнить с функцией распределения Пуассона.

Задание 2:

- 1) Написать алгоритм, блок-схему и программу стандартного метода моделирования биномиального распределения с вероятностью $p=0,4$ появления события в каждом испытании и с вычислением P_{k+1} по рекуррентным формулам.
- 2) Вычислить \bar{X} , S^2 и сравнить их с точными значениями $M\xi$ и $D\xi$ при разных n .
- 3) Построить эмпирическую функцию $F_n(x)$ распределения при разных значениях n .
- 4) Проверить статистически сходимость биномиального распределения к нормальному при увеличении n .
- 5) **Замечания:** Индивидуальность заданий обеспечивается тем, что в задании 1 предлагаются разные распределения варьированием параметра λ и др; в задании 2 – различными значениями параметров p и n .

Лабораторная работа №2

Статистическая проверка равномерности псевдослучайных чисел (ПСЧ), получаемых с помощью датчика ПСЧ «RANDOM»

Теоретическая часть.

- 1) Равномерное распределение (определения, функция распределения, плотность распределения, графики, числовые характеристики, характеристические функции и т. д.).
- 2) Равномерное распределение в интервале $(0,1)$ (все сведения как в п.1) .

- 3) Статистические характеристики выборки, точечные и интервальные оценки для математического ожидания и дисперсии.
- 4) Проверка гипотез, критерии χ^2 и Колмогорова.
- 5) Как построить гистограмму распределения по выборке x_1, x_2, \dots, x_n .
- 6) Стандартный метод моделирования непрерывной случайной величины.

Задание:

- 1) С помощью датчика RANDOM получить n псевдослучайных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
- 2) Найти среднее значение $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i$ и выборочную дисперсию $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 - \bar{X}^2$. Сравнить их с точными значениями $M\alpha = 1/2$ и $D\alpha = 1/12$ для различных n .
- 3) Построить гистограмму; для чего разделить интервал $(0,1)$ на m подинтервалов одинаковой длины $\Delta\ell$. Гистограмму необходимо построить для различных значений n . Для сравнения на той же схеме, где гистограмма, привести график плотности равномерного в $(0,1)$ распределения.
- 4) Построить при разных n эмпирическую функцию распределения; сравнить с теоретической функцией распределения равномерной в $(0,1)$ случайной величины.
- 5) С помощью критерия χ^2 проверить гипотезу о равномерности ПСЧ, получаемых с помощью датчика RANDOM.
- 6) Замечание: Индивидуальность заданий обеспечивается варьированием значений m и n .

Лабораторная работа №3.

Тема: Основы метода Монте-Карло. Статистическое оценивание параметров распределения.

Теоретическая часть.

- 1) Общая постановка задачи оценивания неизвестных параметров распределений. Точечные оценки. Свойства оценок.
- 2) Интервальное оценивание. Интервальные оценки для $M\xi$ и $D\xi$ нормально распределенной генеральной совокупности. Точность оценки математического ожидания m с помощью \bar{X} при заданном значении надежности $P=0,90;0,95$ при известном σ и при замене σ на S . Правило «3-х сигм».
- 3) Теоремы о законе больших чисел (ЗБЧ) и центральная предельная теорема (ЦПТ).
- 4) Общая схема метода Монте-Карло для оценки некоторой величины.
- 5) Задачи метода Монте-Карло.
- 6) Оценка погрешности вычислений метода Монте-Карло.
- 7) Равномерное распределение в $(0,1)$, плотность и функция распределения, $M\xi$ и $D\xi$. Использование при моделировании других случайных величин.

Задание 1:

- 1) Проверить статистически утверждение центральной предельной теоремы: получить с помощью датчика m значений ПСЧ $\alpha_1, \dots, \alpha_m$;
Тогда согласно ЦПТ величина $X = (\sum_{i=1}^n \alpha_i - m/2) / (\sqrt{m/12})$ распределена приблизительно нормально $N(0,1)$.
- 2) Повторив п.1) n раз, получим выборку x_1, \dots, x_n .
- 3) Построить гистограмму относительных частот по полученной выборке. Для этого интервал $(-\infty, \infty)$ разделим на $k+2$ подинтервалов:

первый подинтервал $(-\infty, -3)$, последний - $(3, +\infty)$ интервал $(-3, 3)$

разделим на k подинтервалов длины $\Delta\ell = 6/k$.

- 4) Проверить сходимость формы гистограммы к нормальной $N(0, 1)$ кривой, ее симметричность относительно точки $x = \bar{X}$ (\bar{X} должно быть ≈ 0 , а $S^2 \approx 1$).
- 5) Построить эмпирическую функцию распределения по выборке x_1, \dots, x_n .

Задание 2:

1. Вычислить методом Монте-Карло площадь, ограниченную кривой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ и прямыми } x=-3 \text{ и } x=3.$$

2. Вычислить площадь гистограммы относительных частот с основаниями в интервале $(-3, 3)$.

Замечание. При выборе интервала $(-3, 3)$ руководствовались правилом «3-х сигм».

Лабораторная работа №4

Тема: Вычисление определенных интегралов методом Монте – Карло.

Теоретическая часть:

1. Приближенное вычисление определенных интегралов. Методы прямоугольников (левых, правых), трапеций, Симпсона, Гаусса, Ньютона – Котесса.
2. Моделирование случайных векторов, равномерно распределенных в некоторых областях.
3. Оценка определенных интегралов методом Монте – Карло, как площади.
4. Оптимизация методов оценки интегралов методом М-К:
 - а) выборка по важности (существенная выборка).

- б) выделение главной части.
- в) метод аналитического осреднения.

Задание:

1. Вычислить определенный интеграл $I = \int_G \varphi(x) dx$ методами Монте – Карло и методами Симпсона (Трапеций, Гаусса др.). Сравнить результаты метода М-К при различных значениях количества реализаций n с более точными численными методами. В методе М-К в качестве вспомогательной плотности выбрать равномерное в (a, b) плотность. Оценить погрешности методов интегрирования и сравнить точность полученных результатов.
2. Вычислить заданный интеграл I :
 - а) как площади (или объема);
 - б) используя метод выделения главной части;
 - с) используя метод существенной выборки.
3. Сравнить дисперсии оценок а), в), с) при разных значениях числа реализаций n .

4. Вычислить интеграл вида

$$I = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \varphi(x, y, z) dx dy dz \text{ методом М-К}$$

Метод вычисления – по выбору студента.

Пример: Вычислить двойной интеграл

$$\iint_G (x \cdot y + y) dx dy dz, \text{ где область } G \text{ ограничена прямыми}$$

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 3.$$

Замечание: Индивидуальность лабораторных работ обеспечивается заданием как различных подынтегральных функций, областей интегрирования, так и сочетанием различных методов интегрирования

(например метод Симпсона и метод Монте – Карло, метод трапеций и метод Монте – Карло и т.д.).

Лабораторная работа №5

Тема: Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Монте – Карло.

Теоретическая часть:

1. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2. Прямые методы решения СЛАУ.
3. Итерационные методы решения СЛАУ. Условия сходимости.
4. Интегральные уравнения и системы уравнений.
5. Оценка линейных функционалов от решения интегрального уравнения 2-го рода.
6. Метод М-К для решения СЛАУ $A\bar{x} = \bar{f}$.
7. Приведение к виду $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{f}$.
8. Матрица вероятностей переходов цепи Маркова.

Задание:

- 1) Решить систему $A\bar{x} = \bar{f}$ методами Монте – Карло и простой итерации. Исследовать вопросы применимости метода простой итерации. Сравнить решения, полученные разными методами.
- 2) Найти методом М-К какие-то определенные вектора решения, например x_2 и x_n .
- 3) Найти решения при разных значениях n – реализаций случайного процесса. Сравнить эти результаты.

Замечание: Индивидуальность заданий обеспечивается размерностью или коэффициентами матриц рассматриваемых систем уравнений.

Пример: Матрицу системы $A\bar{x} = \bar{f}$. Получить на ЭВМ следующим формулам:

$$a_{ij} = \frac{1}{k+j}, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad \text{при } k \leq 10$$

$$i, j = 1, \dots, k+1, \quad \text{при } k > 10,$$

где k - номер студента в списке группового журнала;

$$a_{ij} = 0, \quad i = 2, \dots, n; \quad j = i - 1$$

$$i = 1, \dots, n - 1; \quad j = i + 1.$$

Лабораторная работа №6

Тема: Решение задач переноса излучения методом Монте – Карло (прямое моделирование и весовые модификации).

Теоретическая часть:

1. Моделирование показательного закона

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

2. Моделирование случайной величины с плотностью

$$f(x) = c \cdot \lambda e^{-\lambda x}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

3. Моделирование плотностей, заданных кусочно-постоянно и кусочно-линейно.
4. Стандартный метод моделирования дискретной случайной величины.
5. Метод исключения для моделирования непрерывной случайной величины. Моделирование изотропного вектора.
6. Оптические параметры среды, необходимые для описания процесса переноса.
7. Характеристики процесса переноса.
8. Общая схема моделирования процесса переноса методом Монте – Карло, как цепи Маркова.

Задание 1: Пусть на плоскую поверхность пластины толщины H падает параллельный поток излучения под углом θ_0 с осью oz . Среда однородная с коэффициентами рассеяния и поглощения σ_η и σ_c .

После рассеяния в некоторой точке z частица продолжает движение в направлении, определяемом плотностью $f(\mu) = 1/2$, где μ – косинус угла с осью oz , т.е имеет место изотропное рассеяние.

Необходимо в результате моделирования задачи найти:

- 1) Вероятность P_b вылета частицы через поверхность $z=0$;
- 2) Вероятность отражения (вылета через верхнюю границу пластины $z=H$) P_o .
- 3) Вероятность поглощения частицы средой P_n .

Задание 2: Ввести в задачу задания 1 отражение от поверхности $z=0$: при пересечении частицей поверхности $z=0$ она забывает свою «историю» и отражается от поверхности с вероятностью P_a а с вероятностью $1 - P_a$ поглощается поверхностью. Новое направление в случае отражения определяется законом $f(\mu) = 2\mu$, $0 \leq \mu \leq 1$. Вычислить указанные в задании величины (P_b – в этом случае будет – вероятность прихода на поверхность $z=0$).

Задание 3: Использовать весовые методы моделирования длины пробега «без вылета» и моделирование траекторий «без поглощения» по отдельности и в сочетании.

Сравнить дисперсии разных способов расчета величин P_b , P_o и P_n .

Замечание: индивидуальность заданий обеспечивается варьированием геометрических и оптических параметров среды H , σ_η , σ_c .

Лабораторная работа № 7

Тема: Система массового обслуживания.

Теоретическая часть:

1. Дать определение системы массового обслуживания (СМО).
2. Виды СМО: одноканальные; многоканальные; с отказами без очередей; с отказами и с очередями и т.д.
3. Параметры, необходимые для расчета СМО.
4. Поток заявок. Простейший поток. Интенсивность поступления заявок. Распределения. Моделирование распределения Пуассона методом Монте – Карло.
5. Время выполнения заявки: постоянное; случайное. Интенсивность обслуживания заявок. Распределения. Показательное распределение вероятностей.
6. Характеристики, определяющие качество (эффективность) работы СМО: вероятность отказа $P_{от}$, среднее число занятых каналов N_z ; среднее число свободных каналов N_c ; вероятность обслуживания заявки $P_{об}$ и др.
7. Общая схема моделирования СМО методом Монте – Карло (М-К). Оценка основных характеристик качества СМО методом М-К.

Задания:

1. Имеется СМО с 5 каналами обслуживания, работающих независимо друг от друга. Поток поступающих заявок пуассоновский. Время обслуживания очередной заявки распределено по показательному закону с $\lambda = 2$. Интенсивность поступления заявок равна 3. В начальный момент времени все каналы свободны. Заявка поступает на обслуживание в 1 канал. Если какой – то канал занят, то заявка поступает в следующий канал; если все каналы заняты, то система дает отказ.

Необходимо в результате моделирования системы в течении времени $T=30$ мин определить:

- 1) Среднее число обслуженных заявок.
 - 2) Среднее число обслуживания одной заявки.
 - 3) Вероятность того, что заявка будет выполнена (обслужена).
 - 4) Вероятность отказа.
 - 5) Среднее число занятых каналов.
 - 6) Среднее число свободных каналов.
2. Привести эти результаты для разного числа испытаний $n=10; 20; 30$.
(Одно испытание – это моделирование системы в течении 30 мин.).
3. Провести моделирование системы *n.1.* в случае наличия очереди. Длина очереди равна 5.

Необходимо кроме указанных выше параметров рассчитать также:

- 7) Среднюю величину очереди.
- 8) Среднее время ожидания в очереди

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - **50%** и промежуточного контроля - **50%**.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - **10** баллов,
- участие на практических занятиях - **20** баллов,
- выполнение лабораторных заданий - **30** баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ – **40** баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос – **20** баллов,
- письменная контрольная работа - **30** баллов,
- тестирование – **20** баллов,
- коллоквиум – **30** баллов.

Студент, получивший в результате 51 баллов и выше получает «зачет».

Экзаменационная оценка складывается из 50% баллов, полученных студентом по текущему и промежуточному контролю, и 50% баллов, полученных или на экзамене.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

а) основная литература:

1. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М., Наука, 1982.
2. Назаралиев М.А. Статистическое моделирование радиационных процессов в атмосфере. Новосибирск, Наука, 1991 г.
3. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте – Карло. М.: Академия, 2006, 368 с.
4. Ермаков С.М. Метод Монте – Карло в вычислительной математике. Вводный курс. Издательство: Невский Диалект, Бинوم, Лаборатория знаний, 192 с., 2009 г.

б) дополнительная:

1. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. «Метод Монте - Карло в атмосферной оптике». Новосибирск, Наука, 1976.
2. Михайлов Г.А. Оптимизация весовых методов Монте - Карло. М., Наука, 1987.
3. Сенатов В.В. Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Либроком, 2009 г.
4. Ширяев А.Н. Вероятность. Т.1,2.-М.: МЦНМО, 2004 г.

Средства обеспечения освоения дисциплины: программное обеспечение и интернет ресурсы.

1. Программное обеспечение РТС MatCAD 15 F000 Russian + Самоучитель (<http://ewgk.com/soft/41668-matcad-15-f000-russian-samouchitee.htm>).
2. Программное обеспечение MatLAB R2011 b (<http://www.softforfree.com/programs/matlab-26810.html>).
3. Мухин О.И. Моделирование систем. Учебник. (stratum/as/ru/textdjjks/modelir/contents/html).

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. Федеральный портал <http://edu.ru>
2. Электронные каталоги научной библиотеки ДГУ <http://elib.dgu.ru> ; <http://edu.icc.dgu.ru>
3. Электронные версии учебников по математике <http://www.padabum.com/index.php?id=26938&start=so>

Имеется компьютерный класс с 10-ю современными персональными компьютерами и методические указания к выполнению лабораторных работ, в библиотеке ДГУ имеется указанная в пункте 8 литература, имеются методические разработки, размещенные в Интернет сайте ДГУ

При кафедре прикладной математики функционирует студенческая научно-исследовательская лаборатория «Математическое моделирование», оснащенная 5 новыми ПК, презентационной и оргтехникой.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

10.1.Методические указания студентам

Перечень учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам, для подготовки к занятиям представлен в разделе «Учебно-методическое обеспечение. Литература».

Лекционный курс. Лекция является основной формой обучения в высшем учебном заведении. В ходе лекционного курса проводится систематическое изложение научных материалов, освещение основных понятий дисциплины и закрепление теоретического материала.

В тетради для конспектирования лекций необходимо иметь поля, где по ходу конспектирования студент делает необходимые пометки. Записи должны быть избирательными, своими словами, полностью следует записывать только определения. В конспектах рекомендуется применять сокращения слов, что ускоряет запись. В ходе изучения дисциплины **Методы стати-**

статистического моделирования особое значение имеют формулы, схемы и рисунки, поэтому в конспекте лекции рекомендуется делать все рисунки, сделанные преподавателем на доске. Вопросы, возникшие у студента в ходе лекции, рекомендуется записывать на полях и после окончания лекции обратиться за разъяснением к преподавателю.

Студенту необходимо активно работать с конспектом лекции: после окончания лекции рекомендуется перечитать свои записи, внести поправки и дополнения на полях, используя указанную в разделе 8 литературу. Конспекты лекций следует использовать при подготовке к экзамену, контрольным тестам, при выполнении самостоятельных заданий.

Лабораторные занятия. Лабораторные работы по дисциплине Методы статистического моделирования имеют целью реально научить студентов решению практических задач, научить их навыкам выполнения расчетных работ с использованием современной вычислительной техники и пакетов прикладных программ, и главное научить их самим алгоритмизации, программированию и решению задач на ЭВМ. Защита и сдача всех лабораторных работ является обязательным условием допуска студента к экзамену. В случае пропуска занятий по уважительной причине пропущенное лабораторное занятие подлежит отработке.

Студент должен вести активную познавательную работу. Важно научиться включать вновь получаемую информацию в систему уже имеющихся знаний. Необходимо также анализировать численные результаты, полученные в ходе выполнения лабораторной работы, делать по ним определенные выводы и находить общие закономерности, даваемые теорией, сравнивать с другими численными результатами (напр. по аналитическим формулам), с экспериментом. Важное место в самостоятельном обучении студентов должна занимать работа в образовательной среде ИНТЕРНЕТа. Такие ресурсы указаны в разделе «Программное обеспечение и интернет ресурсы» данной Программы.

10.2. Методические рекомендации преподавателю

Курс **Методы статистического моделирования** является продолжением курсов «Теория вероятностей и математическая статистика», «Теория случайных процессов» и «Численные методы». При изучении курса необходимы также знания из «теории функций», теории интеграла др. общематематических дисциплин. Методы статистического моделирования находят все большее применение при решении статистических задач в различных областях физики, экономики, социологии, техники и др. Поэтому при изложении материала большое внимание должно уделяться практическому применению, практической реализации изучаемых методов. Для этого в учебном процессе должны быть использованы разнообразные методы обучения, в частности, наиболее эффективным видом занятий по данной дисциплине являются лабораторные работы, выполняемые в компьютерных классах. При этом широко используются возможности современных пакетов прикладных программ, напр. MathCAD, СТАТИСТИКА, Математика и др. Оформление по сформулированным преподавателем требованиям лабораторных работ и их защита является одним из способов промежуточной аттестации, оценки знаний, студентов.

Необходимо разнообразные формы самостоятельной работы, студентов обеспечивающих наибольшую эффективность в изучении дисциплины.

Пакет заданий для самостоятельной работы следует выдавать в начале семестра, определив предельные сроки их выполнения и сдачи. Задания для самостоятельной работы желательно составлять из обязательной и факультативной частей.

Организуя самостоятельную работу, необходимо постоянно обучать студентов методам такой работы.

Вводная лекция - главное звено дидактического цикла обучения. Её цель - формирование у студентов ориентировочной основы для последующе-

го усвоения материала, методе самостоятельной работы. Содержание лекции должно отвечать следующим дидактическим требованиям:

- изложение материала от простого к сложному, от известного к неизвестному;

- логичность, четкость и ясность в изложении материала;

- возможность проблемного изложения, дискуссии, диалога с целью активизации деятельности студентов;

- опора смысловой части лекции на подлинные факты, события, явления, статистические данные;

- тесная связь теоретических положений и выводов с практикой и будущей профессиональной деятельностью студентов.

Преподаватель, читающий лекционные курсы в вузе, должен знать существующие в педагогической науке и используемые на практике варианты лекций, их дидактические и воспитывающие возможности, а также их методическое место в структуре процесса обучения.

При изложении материала важно помнить, что почти половина информации на лекции передается через интонацию. Надо учесть, что первый кризис внимания студентов наступает на 15-20-й минутах, второй - на 30-35-й минутах. В профессиональном общении нужно исходить из того, что восприятие лекций студентами младших и старших курсов существенно отличается по готовности и умению.

При проведении аттестации студентов важно всегда помнить, что систематичность, объективность, аргументированность - главные принципы, на которых основаны контроль и оценка знаний студентов. Проверка, контроль и оценка знаний студента, требуют учета его индивидуального стиля в осуществлении учебной деятельности. Знание критериев оценки знаний обязательно для преподавателя и студента.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для успешного освоения дисциплины обучающийся использует также кроме указанных выше в п. 8 программного обеспечения и интернет-ресурсов следующие пакеты прикладных программ: Mathcad, Matlab, Delphi, Statistica и др.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Учебные аудитории факультета для проведения лекционных и семинарских занятий, оснащенные современной презентационной техникой; компьютерные классы факультета и ИВЦ ДГУ, лабораторию «Математическое моделирование» при кафедре прикладной математики. В университете имеется комплект лицензионного программного обеспечения.