МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Численные методы

Кафедра прикладной математики факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа
01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Профиль подготовки
Математическое моделирование

Уровень высшего образования
Бакалавриат

Форма обучения
Очная

Статус дисциплины: ***Базовый***

Махачкала, 2017

Рабочая программа дисциплине «*Численные методы*» составлена в 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 - Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) от «12 марта 2015 г. №228

Разработчик:

1. кафедра прикладной математики Абдурагимов Г.Э., к.ф.-м. н., доцент;

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от «_7__» марта 2017г., протокол №7

Зав. кафедрой ________________ Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «10» марта 2017г., протокол №4.

Председатель ________________ Меджидов З.Г.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением

«27» 03 2017 г. ____________________

(подпись)

Рабочая программа дисциплине «*Численные методы*» составлена в 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки (специальности) 01.03.02 - Прикладная математика и информатика (уровень бакалавриата) от «12 марта 2015 г. №228

Разработчик:

1. кафедра прикладной математики Абдурагимов Г.Э., к.ф.-м. н., доцент;

Рабочая программа дисциплины одобрена:

на заседании кафедры прикладной математики от «_7__» марта 2017г., протокол №7

Зав. кафедрой ________________ Кадиев Р.И.

на заседании Методической комиссии факультета математики и компьютерных наук от «10» марта 2017г., протокол №4.

Председатель ________________ Меджидов З.Г.

Рабочая программа дисциплины согласована с учебно-методическим управлением

«____» _____________2017 г. _______________________

(подпись)

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Численные методы» входит в *базовую* часть образовательной программы *бакалавриата* по направлению (специальности) 01.03.02 - Прикладная математика и информатика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой прикладной математики.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с ознакомлением с базовыми математическими моделями и освоением численных методов решения практических задач алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, физики, техники и др., а также знакомством с современными направлениями развития численных методов.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника: общепрофессиональных – ОПК-1, ОПК-2 и профессиональных – ПК-2, ПК-4, ПК-8.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия, лабораторные занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме контрольных работ, коллоквиума и промежуточный контроль в форме зачета и экзамена.

Объем дисциплины 8 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

<table>
<tr><td rowspan="5">Семестр</td><td colspan="7">Учебные занятия</td><td rowspan="5">Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен</td></tr>
<tr><td colspan="7">в том числе</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Всего</td><td colspan="5">Контактная работа обучающихся с преподавателем</td><td rowspan="3">СРС, в том числе экзамен</td></tr>
<tr><td colspan="5">из них</td></tr>
<tr><td>Лекции</td><td>Лабораторные занятия</td><td>Практические занятия</td><td>КСР</td><td>консультации</td></tr>
<tr><td>5</td><td>144</td><td>34</td><td>34</td><td>32</td><td></td><td></td><td>44</td><td>зачет</td></tr>
<tr><td>6</td><td>144</td><td>30</td><td>30</td><td>14</td><td></td><td></td><td>70</td><td>экзамен</td></tr>
</table>

1. Цели освоения дисциплины

Цель изучения дисциплины «Численные методы» – владение студентами теорией разнообразных численных методов и умение применять численные методы на практике при решении практических задач алгебры, математического анализа, дифференциальных уравнений, физики, техники и др.

Задачи изучения дисциплины:

а) изучить теорию численных методов;

б) закрепить на практике теоретические знания, то–есть, по заданной задаче студент должен выбрать нужный метод, разработать алгоритм решения соответствующий этому методу, написать программу или воспользоваться пакетом прикладных программ.

в) на лабораторных занятиях получить опыт решения задач на ЭВМ.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Численные методы» входит в *базовую* часть образовательной программы *бакалавриата* по направлению (специальности) 01.03.02 – Прикладная математика и информатики и изучается на третьем курсе в пятом и шестом семестрах после изучения студентами необходимых для усвоения курса дисциплин: математический анализ, алгебра, информатика и дифференциальные уравнения. Она входит в федеральный компонент математических и естественнонаучных дисциплин и является обязательной для изучения. Изучив дисциплину, студенты должны усвоить основные численные методы практического решения задач математического анализа, алгебры и дифференциальных уравнений и уметь их применять на практике, т.е. решать практические задачи, пользуясь ЭВМ.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	**Знать**: основные математические дисциплины и современные информационные технологии; **Уметь**: применять полученные базовые знания при исследовании вопросов прикладной математики; **Владеть**: базовым математическим аппаратом и информационными технологиями
ОПК-2	способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии	**Знать**: оперировать современными образовательными и информационными технологиями; **Уметь**: с помощью передовых технологий накапливать научный и профессиональный опыт; **Владеть**: современным образовательным и информационным инструментарием
ПК-2	способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	**Знать**: современный математический аппарат; **Уметь**: совершенствовать и применять в приложениях соответствующие знания; **Владеть**: современными математическими методами
ПК-4	способность работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности	**Знать**: иметь соответствующую профессиональную подготовку; **Уметь**: работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности;

		Владеть: профессиональными качествами
ПК-8	способность приобретать и использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности	**Знать**: организацию и планирование необходимых профессиональных навыков и ресурсов; **Уметь**: использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности; **Владеть**: организационно-управленческими навыками в профессиональной и социальной деятельности

4. Объем, структура и содержание дисциплины

4.1 Объем дисциплины составляет 8 зачетных единиц, 288 академических часов.

4.2 Структура и содержание дисциплины (модуля).

№ п/п	**Раздел (модуль) дисциплины**	**Семестр**	**Неделя семестра**	**Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)**				Самостоятельная работа	**Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)***
				Лек	Лаб. раб	Практ.	Контроль сам. раб		
Модуль 1. Численные методы математического анализа. Интерполяция функций одной переменной.									
1	Постановка задачи. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка остаточного члена.	**5**		2	8	6		4	Опрос, лабораторная работа
2	Разделенные разности и их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона.			2				4	Опрос, лабораторная работа
3	Конечные разности и их применение в			2		4		4	Опрос, самостоятельная

	численном дифференцировании.								работа
4	Многочлен Чебышева. Минимизация оценки погрешности интерполяции.			2				2	Опрос, самостоятельная работа
5	Понятие о сплайнах и их применение			2		2		2	Опрос, самостоятельная работа
Всего по модулю 1				**10**	**8**	**12**		**16**	**Письменная контрольная работа**
Модуль 2. Численные методы математического анализа. Численное интегрирование.									
1	Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций, оценка погрешности.			4	10	2		8	Опрос, лабораторная работа
2	Квадратурная формула Симпсона, оценка погрешности.			2		2		8	Опрос, лабораторная работа
3	Правило Рунге практической оценки погрешности.			2				8	Опрос, лабораторная работа
Всего по модулю 2				**8**	**10**	**4**		**24**	**Письменная контрольная работа**
Модуль 3. Численные методы алгебры									
1	Прямые методы решения СЛАУ. Метод квадратного корня.			2		4			Опрос, лабораторная работа
2	Метод Халецкого			2					Опрос, лабораторная работа
3	Сходимость последовательностей матриц и векторов. Три нормы матриц и векторов.			2		4		2	Опрос, лабораторная работа
4	Матричная геометрическая прогрессия			2					Опрос, самостоятельная работа
5	Метод простой итерации решения СЛАУ. Сходимость. Особенность реализации на ЭВМ.			2	8	4			Опрос, лабораторная работа
6	Метод Зейделя решения СЛАУ.			2	8			2	Опрос, лабораторная работа
7	Метод простой итерации решения нелинейных уравнений			2		4			Опрос, самостоятельная работа
8	Метод Ньютона.			2					Опрос, самостоятельная работа
Всего по модулю 3				**16**	**16**	**16**		**4**	**Письменная контрольная работа**
ИТОГО ЗА 1 СЕМЕСТР				**34**	**34**	**32**		**44**	**Зачет**
Модуль 4. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений									
1	Приближенный метод Тейлора и численный метод Эйлера.	**6**		2	2	2		4	Опрос, лабораторная работа
2	Одношаговые методы Рунге-Кутта.			2	2			4	Опрос, лабораторная работа

3	Оценка погрешности одношаговых методов			2	2			4	Опрос, лабораторная работа
4	Многошаговые методы. Явные методы Адамса.			2	2	2		4	Опрос, лабораторная работа
5	Многошаговые методы. Неявные методы Адамса.			2	2			4	Опрос, лабораторная работа
Всего по модулю 4				**10**	**10**	**4**		**20**	**Письменная контрольная работа**
Модуль 5. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений									
1	Разностная схема, аппроксимирующая двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка, ее разрешимость, порядок аппроксимации.			2	2	2		6	Опрос, самостоятельная работа
2	Сходимость разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.			2				6	Опрос, самостоятельная работа
3	Метод прогонки решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.			2	4	2		6	Опрос, лабораторная работа
4	Устойчивость метода прогонки			2				6	Опрос, лабораторная работа
5	Метод стрельбы решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка			2	4	2		6	Опрос, лабораторная работа
Всего по модулю 5				**10**	**10**	**6**		**30**	**Письменная контрольная работа**
Модуль 6. Численные методы решения уравнений параболического типа									
1	Разностные схемы. Основные понятия: сходимость, устойчивость, аппроксимация. Связь аппроксимации устойчивости со сходимостью.			2		2		4	Опрос, самостоятельная работа
2	Разностные схемы, аппроксимирующие задачу Коши для параболического уравнения.			2	4			4	Опрос, лабораторная работа
3	Устойчивость явных двухслойных разностных схем.			2				4	Опрос, самостоятельная работа
4	Решение смешанной граничной задачи.			2	4			4	Опрос, самостоятельная работа
Всего по модулю 6				**8**	**8**	**2**		**16**	**Письменная**

									контрольная работа
Модуль 7. Численные методы решения уравнений эллиптического типа									
1	Построение разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка.			2	2	2		4	Опрос, лабораторная работа
Всего по модулю 7				**2**	**2**	**2**		**4**	**Письменная контрольная работа**
Модуль 8. Подготовка к экзамену									
Подготовка к экзамену									**Экзамен**
ИТОГО ЗА 2 СЕМЕСТР				**30**	**30**	**14**		**70**	**Экзамен**
ИТОГО:				**64**	**64**	**46**		**114**	**288**

4.3 Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

Курс «Численные методы» разбит на модули и темы. Ниже приводится содержание этого курса.

ЛЕКЦИИ

Модуль 1. Численные методы математического анализа. Интерполяций функций одной переменной.

Тема 1. Постановка задачи. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка остаточного члена.

Понятие интерполяции и ее значение в вычислительной математике. Определение интерполяционного многочлена. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Остаточный член.

Тема 2. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона.

Понятие разделенной разности. Свойства разделенных разностей. Вычисление разделенных разностей. Запись интерполяционного многочлена в форме Ньютона с помощью разделенных разностей.

Тема 3. Конечные разности и их применение к численному дифференцированию.

Понятие конечной разности k-ого порядка, свойства конечных разностей, вычисление конечных разностей. Применение конечных разностей к вычислению производных.

Тема 4. Многочлен Чебышева. Минимизация оценки погрешности интерполяции.

Многочлен Чебышева, его свойства. Применение многочлена Чебышева к минимизации оценки погрешности интерполяции.

Тема 5. Понятие о сплайнах и их применении.

Понятие сплайна. Применение сплайнов в вычислительной математике. Пример построения сплайна третьей степени.

Модуль 2. Численные методы математического анализа. Численное интегрирование.

Тема 6. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций, оценка погрешности.

Понятие о квадратурных формулах и их применении к приближенному вычислению интегралов. Вывод квадратурных формул прямоугольников и трапеций. Вывод соответствующих формул остаточных членов и их оценок.

Тема 7. Квадратурная формула Симпсона, оценка погрешности.

Вывод квадратурной формулы Симпсона. Вывод формулы остаточного члена и его оценки.

Тема 8. Правило Рунге практической оценки погрешности.

Правило Рунге и его применение для практической оценки погрешности. Алгоритм приближенного вычисления интеграла с применением правила Рунге.

Модуль 3. Численные методы алгебры

Тема 9. Прямые методы решения СЛАУ. Метод квадратного корня.

Понятия о прямых и итерационных методах решения СЛАУ. Вывод формул метода квадратного корня, алгоритм метода.

Тема 10. Метод Халецкого.

Вывод формул метода Халецкого, алгоритм метода.

Тема 11. Сходимости последовательностей матриц и векторов. Три нормы матриц и векторов.

Различные виды сходимостей последовательностей векторов и матриц. Определения норм векторов и матриц. Три наиболее распространенные нормы матриц и векторов.

Тема 12. Матричная геометрическая прогрессия.

Понятие матричной геометрической погрешности. Необходимые и достаточные условия сходимости матричной геометрической прогрессии. Сумма сходящейся матричной геометрической прогрессии.

Тема 13. Метод простой итерации решения СЛАУ. Сходимость. Особенность реализации на ЭВМ.

Формулы метода простой итерации. Необходимые и достаточные условия сходимости метода простой итерации. Достаточные условия сходимости метода простой итерации. Оценка погрешности. Решение СЛАУ с заданной точностью методом простой итерации.

Тема 14. Метод Зейделя решения СЛАУ.

Причина возникновения метода Зейделя. Формулы метода Зейделя. Необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя. Достаточные условия сходимости метода. Оценка погрешности. Решение СЛАУ с заданной точностью методом Зейделя.

Тема 15. Метод простой итерации решения нелинейных уравнений.

Формулы метода простой итерации решения функциональных уравнений. Сходимость метода, оценка погрешности. Применение метода простой итераций к решению нелинейных алгебраических уравнений.

Тема 16. Метод Ньютона.

Формулы метода Ньютона решения функциональных уравнений. Сходимость метода, оценка погрешности. Применение метода Ньютона к решению нелинейных алгебраических уравнений.

Модуль 4. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 17. **Приближенный метод Тейлора и численный метод Эйлера.**

Метод Тейлора для нахождения приближенного решения задачи Коши для ОДУ, примеры применения. Понятия сетки, узлов сетки, сходимости. Численный метод Эйлера приближенного вычисления значений решения задачи Коши для ОДУ в узлах сетки.

Тема 18. **Одношаговые методы Рунге-Кутта.**

Понятия об одношаговых и многошаговых методах. Вывод одношаговых формул Рунге-Кутта. Алгоритм вычисления значений решения задачи Коши в узлах сетки с заданной точностью по формулам Рунге-Кутта.

Тема 19. **Оценка погрешности одношаговых методов.**

Вывод оценки погрешности одношаговых методов решения задачи Коши для ОДУ.

Тема 20. Многошаговые методы. Явные методы Адамса.

Необходимость изучения многошаговых методов. Явные многошаговые методы Адамса. Их вывод.

Тема 21. Многошаговые методы. Неявные методы Адамса.

Необходимость изучения многошаговых методов. Неявные многошаговые методы Адамса. Их вывод.

Модуль 5. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 22. Разностная схема, аппроксимирующая двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка, ее разрешимость, порядок аппроксимации.

Понятия: узел, сетка, разностная схема, аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости. Разностная схема, аппроксимирующая двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка, ее разрешимость, порядок аппроксимации.

Тема 23. Сходимость разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Доказательство сходимости разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Тема 24. Метод прогонки решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Метод прогонки решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка. Алгоритмы решения двухточечных краевых задач этим методам.

Тема 25. Устойчивость метода прогонки.

Корректность метода прогонки. Необходимые и достаточные условия устойчивости метода прогонки.

Тема 26. Устойчивость методы прогонки решения разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Необходимые и достаточные условия устойчивости метода прогонки решения краевой задачи для разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Тема 27. Метод стрельбы решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Метод стрельбы решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка, его устойчивость. Алгоритмы решения двухточечных краевых задач этим методам.

Модуль 6. Численные методы решения уравнений параболического типа

Тема 28. Разностные схемы. Основные понятия: сходимость, устойчивость, аппроксимация. Связь аппроксимации устойчивости со сходимостью.

Разностные схемы. Основные понятия: сходимость, устойчивость, аппроксимация, порядок аппроксимации, порядок сходимости. Доказательство теоремы о связи аппроксимации устойчивости со сходимостью.

Тема 29. Разностные схемы, аппроксимирующие задачу Коши для параболического уравнения.

Явная и неявная двухслойные разностные схемы, аппроксимирующие задачу Коши для параболического уравнения, порядок аппроксимации. Алгоритм нахождения приближенных значений решения задачи Коши в узлах сетки, пользуясь явной и неявной двухслойной разностной схемой.

Тема 30. Устойчивость явных двухслойных разностных схем.

Достаточное условие устойчивости явной двухслойной разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши для уравнения теплопроводности.

Тема 31. Решение смешанной граничной задачи.

Явная и неявная двухслойные разностные схемы, аппроксимирующие смешанную граничную задачу для уравнения теплопроводности. Алгоритм нахождения приближенных значений решения смешанной граничной задачи в узлах сетки, пользуясь явной и неявной двухслойной разностной схемой.

Модуль 7. Численные методы решения уравнений эллиптического типа

Тема 32. Построение разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка.

Аппроксимация граничных условий Дирихле и Неймана. Порядок аппроксимации. Аппроксимация линейного эллиптического уравнения второго порядка. Порядок аппроксимации.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Модуль 1. Численные методы математического анализа. Интерполяций функций одной переменной.

Тема 1. Постановка задачи. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Оценка остаточного члена. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционный многочлен Ньютона.

Понятие интерполяции. Определение, существование и единственность интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Остаточный член. Понятие и свойства разделенных разностей. Вычисление разделенных разностей. Запись интерполяционного многочлена в форме Ньютона с помощью разделенных разностей.

Тема 2. Конечные разности и их применение к численному дифференцированию. Многочлен Чебышева. Минимизация оценки погрешности интерполяции.

Понятие конечной разности k-ого порядка, свойства конечных разностей, вычисление конечных разностей. Применение конечных разностей к вычислению производных. Многочлен Чебышева, его свойства. Применение многочлена Чебышева к минимизации оценки погрешности интерполяции.

Тема 3. Понятие о сплайнах и их применении.

Понятие сплайна. Применение сплайнов в вычислительной математике. Пример построения сплайна третьей степени.

Модуль 2. Численные методы математического анализа. Численное интегрирование.

Тема 4. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций, оценка погрешности.

Понятие о квадратурных формулах и их применении к приближенному вычислению интегралов. Квадратурные формулы прямоугольников и трапеций, их остаточные члены и оценки.

Тема 5. Квадратурная формула Симпсона, оценка погрешности. Правило Рунге практической оценки погрешности.

Квадратурная формула Симпсона, остаточный член и его оценки. Правило Рунге и его применение для практической оценки погрешности. Алгоритм приближенного вычисления интеграла с применением правила Рунге.

Модуль 3. Численные методы алгебры

Тема 5. Прямые методы решения СЛАУ. Метод квадратного корня. Метод Халецкого.

Понятия о прямых и итерационных методах решения СЛАУ. Формула метода квадратного корня, алгоритм метода. Формула метода Халецкого, алгоритм метода.

Тема 6. Сходимости последовательностей матриц и векторов. Три нормы матриц и векторов. Матричная геометрическая прогрессия.

Различные виды сходимостей последовательностей векторов и матриц. Определения норм векторов и матриц. Три наиболее распространенные нормы матриц и векторов. Понятие матричной геометрической погрешности. Необходимые и достаточные условия сходимости матричной геометрической прогрессии. Сумма сходящейся матричной геометрической прогрессии.

Тема 7. Метод простой итерации решения СЛАУ. Сходимость. Особенность реализации на ЭВМ. Метод Зейделя решения СЛАУ.

Формулы метода простой итерации. Необходимые и достаточные условия сходимости метода простой итерации. Достаточные условия сходимости метода простой итерации. Оценка погрешности. Решение СЛАУ с заданной точностью методом простой итерации. Формулы метода Зейделя. Необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя. Достаточные условия сходимости метода. Оценка погрешности. Решение СЛАУ с заданной точностью методом Зейделя.

Тема 8. Метод простой итерации решения нелинейных уравнений. Метод Ньютона.

Формулы метода простой итерации решения функциональных уравнений. Сходимость метода, оценка погрешности. Применение метода простой итераций к решению нелинейных алгебраических уравнений. Формулы метода Ньютона решения функциональных уравнений. Сходимость метода, оценка погрешности. Применение метода Ньютона к решению нелинейных алгебраических уравнений.

Модуль 4. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 9. Приближенный метод Тейлора и численный метод Эйлера.

Метод Тейлора для нахождения приближенного решения задачи Коши для ОДУ, примеры применения. Понятия сетки, узлов сетки, сходимости. Численный метод Эйлера приближенного вычисления значений решения задачи Коши для ОДУ в узлах сетки.

Тема 10. Одношаговые методы Рунге-Кутта.

Понятия об одношаговых и многошаговых методах. Одношаговые формулы Рунге-Кутта. Алгоритм вычисления значений решения задачи Коши в узлах сетки с заданной точностью по формулам Рунге-Кутта.

Тема 11. Оценка погрешности одношаговых методов.

Оценки погрешности одношаговых методов решения задачи Коши для ОДУ.

Тема 12. Многошаговые методы. Явные методы Адамса.

Необходимость изучения многошаговых методов. Явные многошаговые методы Адамса.

Тема 13. Многошаговые методы. Неявные методы Адамса.

Необходимость изучения многошаговых методов. Неявные многошаговые методы Адамса.

Модуль 5. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 14. Разностная схема, аппроксимирующая двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка, ее разрешимость, порядок аппроксимации.

Понятия: узел, сетка, разностная схема, аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости. Разностная схема, аппроксимирующая двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка, ее разрешимость, порядок аппроксимации.

Тема 15. Сходимость разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Сходимость разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Тема 16. Метод прогонки решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Метод прогонки решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка. Алгоритмы решения двухточечных краевых задач этим методам.

Тема 17. Устойчивость метода прогонки.

Корректность метода прогонки. Необходимые и достаточные условия устойчивости метода прогонки.

Тема 18. Метод стрельбы решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка.

Метод стрельбы решения разностной схемы, аппроксимирующей двухточечную краевую задачу для линейного ОДУ второго порядка, его устойчивость. Алгоритмы решения двухточечных краевых задач этим методам.

Модуль 6. Численные методы решения уравнений параболического типа

Тема 19. Разностные схемы. Основные понятия: сходимость, устойчивость, аппроксимация. Связь аппроксимации устойчивости со сходимостью.

Разностные схемы. Основные понятия: сходимость, устойчивость, аппроксимация, порядок аппроксимации, порядок сходимости. Теорема о связи аппроксимации устойчивости со сходимостью.

Тема 20. Разностные схемы, аппроксимирующие задачу Коши для параболического уравнения.

Явная и неявная двухслойные разностные схемы, аппроксимирующие задачу Коши для параболического уравнения, порядок аппроксимации. Алгоритм нахождения приближенных значений решения задачи Коши в узлах сетки, пользуясь явной и неявной двухслойной разностной схемой.

Тема 21. Устойчивость явных двухслойных разностных схем.

Достаточное условие устойчивости явной двухслойной разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши для уравнения теплопроводности.

Тема 22. Решение смешанной граничной задачи.

Явная и неявная двухслойные разностные схемы, аппроксимирующие смешанную граничную задачу для уравнения теплопроводности. Алгоритм нахождения приближенных значений решения смешанной граничной задачи в узлах сетки, пользуясь явной и неявной двухслойной разностной схемой.

Модуль 7. Численные методы решения уравнений эллиптического типа

Тема 23. Построение разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка.

Аппроксимация граничных условий Дирихле и Неймана. Порядок аппроксимации. Аппроксимация линейного эллиптического уравнения второго порядка. Порядок аппроксимации.

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ

№ п/п	Тема	Аудиторные часы
	Модуль 1. Лабораторные занятия по теме: ***<u>Численные методы математического анализа</u>***	**8**
1.1лб	Интерполяций функций одной переменной	8
	Модуль 1. Лабораторные занятия по теме: ***<u>Численные методы математического анализа</u>***	**10**
2.1лб	Численное интегрирование	10
	Модуль 3. Лабораторные занятия по теме: ***<u>Численные методы алгебры</u>***	**16**
3.1лб	Прямые методы решения СЛАУ	8
3.2лб	Итерационные методы решения СЛАУ	8
	Модуль 4. Лабораторные занятия по теме: ***<u>Численные методы решения задачи Коши для ОДУ</u>***	**10**
4.1лб	Методы Рунге-Кутте решения задачи Коши. Методы Адамса.	10
	Модуль 5. Лабораторные занятия по теме: ***<u>Численные методы решения краевых задач для ОДУ</u>***	**10**
5.1лб	Численные методы стрельбы решения двухточечной краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка.	5
5.2лб	Численные методы прогонки решения двухточечной краевой задачи для линейного ОДУ второго порядка.	5
	Модуль 6. Лабораторные занятия по теме: ***<u>Численные методы решения уравнений параболического типа</u>***	**8**
6.1лб	Разностные схемы для параболических уравнений	8
	Модуль 7. Лабораторные занятия по теме: ***<u>Численные методы решения уравнений эллиптического типа</u>***	**2**
7.1лб	Разностные схемы для уравнений эллиптического типа	2

5. Образовательные технологии: активные и интерактивные формы проведения занятий

В процессе преподавания дисциплины «Численные методы» применяются различные активные и интерактивные формы проведения занятий. При чтении лекций – обзорная лекция, проблемная лекция, лекция визуализации с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные оснащенные такой техникой лекционные аудитории.

При проведении практических и лабораторных занятий кроме указанной презентационной техники используются интернет-ресурсы, пакеты прикладных программ MathCAD, Matlab, Математика-5 и др.

Доля занятий, проводимых в интерактивной форме, составляет примерно 15% всех аудиторных занятий.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Перечень примерных заданий для самостоятельной работы.

1. Что означает запись:

   1) $a = 2.747 \pm 0{,}001$;   2) $a = 0{,}4685(1 \pm 0{,}02)$?

2. Как оценить относительную погрешность произведения $u.v$ или частного $\frac{u}{v}$?
3. Как оценить абсолютную погрешность суммы или разности ?
4. Как оценить абсолютную погрешность вычисления функции ?
5. Каким условиям должен удовлетворять алгебраический интерполяционный многочлен для функции $f(x)$ по ее значениям в узлах $x_0, x_1, ..., x_n$?
6. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для табличной функции $f(x)$:

x	1	1,2	1,5	1,6
$f(x)$	0,87	0,97	0,80	0,62

используя все значения этой функции.

7. Пользуясь формулой интерполяционного многочлена Ньютона, найти $f(0{,}75)$ для табличной функции $f(x)$:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$f(x)$	2,13	1,88	1,25	1,00	1,20

8. Вычислить разделенную разность $f(0;1;2;...;100)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)...(x-99).$

9. Найти конечную разность $\Delta^4 f_1,$ если $x_i = ih, \quad f(x) = \sin \pi x + x^4 + 2.$

10. Где используются конечные разности?

11. Пользуясь квадратурной формулой средних прямоугольников с четырьмя узлами, вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}.$

12. Пользуясь квадратурной формулой трапеций с пятью узлами, вычислить приближенно интеграл $\int\limits_1^2 (x + \frac{1}{x^2})dx.$ Сравнить полученное значение с точным.

13. На какое минимальных число равных частей необходимо разделить отрезок [0,1], чтобы вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x-1}{x+1}dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ по квадратурной формуле трапеций?

14. На какое минимальных число равных частей необходимо разделить отрезок [0,1], чтобы вычислить интеграл $\int\limits_1^2 \frac{x+1}{x^2}dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ по квадратурной формуле Симпсона?

15. Вывести квадратурную формулу Гаусса с тремя узлами для приближенного вычисления интеграла $\int\limits_2^3 f(x)dx.$

16. Многочлены Чебышева , их свойства и применение.

17. Нормы матриц и векторов. Наиболее употребительные нормы. Найти

$$\frac{\|A\|_1 + \|A\|_2 + \|A\|_3}{3} + \|b\|_2, \text{ если } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

18. Матричная геометрическая прогрессия, ее сходимость. Сходится ли матричная геометрическая прогрессия $E + A + A^2 + \ldots,$ если $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$? Если сходится, то найти ее сумму.

19. Метод простой итерации для СЛАУ, его сходимость. Сходится ли метод простой итерации для системы $x = Bx + c,$ где

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & -0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}?$$

Если сходится, то найти третье приближение к решению, взяв начальное приближение $x^0 = c$, и оценить при этом какую-либо норму погрешности.

20. Метод Зейделя решения СЛАУ, его сходимость. Сходится ли метод Зейделя для системы $x = Bx + c,$ если $B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/3 & -1/2 \end{pmatrix}$?

21. Составить методом простой итерации сходящийся итерационный процесс для нахождения приближенного решения уравнения $xe^x = 2.$ За какое минимальное число итераций можно найти корень этого уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$?

22. Составить методом Ньютона сходящийся итерационный процесс для нахождения приближенного решения уравнения $2x = \cos x + 3.$ За какое минимальное число итераций можно найти корень этого уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$?

23. Пользуясь формулой Эйлера, найти приближенно $y(0{,}3),$ где $y(x) -$ решение задачи Коши: $y' = y - x^2 + 2x, \;\; y(0) = 0.$

24. Дать определения: *сетки, узла, аппроксимации, порядка аппроксимации, устойчивости, сходимости, порядка сходимости.*

25. Методом сеток аппроксимировать с помощью явной двухслойной разностной схемы аппроксимировать задачу Коши для уравнения теплопроводности. Определить порядок аппроксимации.

25. Необходимое и достаточное условие сходимости явной двухслойной разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши для уравнения теплопроводности.

26. Аппроксимация методом сеток граничных условий Дирихле и Неймана, порядок аппроксимации.
27. Аппроксимация методом сеток задачи Коши для уравнения колебания струны, порядок аппроксимации.
28. Устойчивость трехслойной разностной схемы, аппроксимирующей задачу Коши для уравнения колебания струны.

Литература для выполнения самостоятельной работы: рекомендованная к данному курсу основная [1]-[4] и дополнительная литература [6], [7], конспекты лекций.

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины .

7.1 Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-1	**Знать**: основные математические дисциплины и современные информационные технологии; **Уметь**: применять полученные базовые знания при исследовании вопросов прикладной математики; **Владеть**: базовым математическим аппаратом и информационными технологиями	Контрольные работы, экзамен
ОПК-2	**Знать**: оперировать современными образовательными и информационными технологиями; **Уметь**: с помощью передовых технологий накапливать научный и профессиональный опыт;	Контрольные работы, экзамен

	Владеть: современным образовательным и информационным инструментарием	
ПК-2	**Знать**: современный математический аппарат; **Уметь**: совершенствовать и применять в приложениях соответствующие знания; **Владеть**: современными математическими методами	Контрольные работы, экзамен
ПК-4	**Знать**: иметь соответствующую профессиональную подготовку; **Уметь**: работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности; **Владеть**: профессиональными качествами	Контрольные работы, экзамен
ПК-8	**Знать**: организацию и планирование необходимых профессиональных навыков и ресурсов; **Уметь**: использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности ; **Владеть**: организационно-управленческими навыками в профессиональной и социальной деятельности	Контрольные работы, экзамен

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

ОПК-1

Схема оценки уровня формирования компетенции «способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	**Знать**: основные математические дисциплины и современные	Демонстрирует слабые знания базовых математических	Может осуществлять постановку и выбор методов	Может эффективно осуществлять постановку и

	информационные технологии; **Уметь**: применять полученные базовые знания при исследовании вопросов прикладной математики; **Владеть**: базовым математическим аппаратом и информационными технологиями	дисциплин и информационных технологий	решения соответствующих прикладных задач	решение прикладных задач

ОПК-2

Схема оценки уровня формирования компетенции «способность приобретать новые научные и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	**Знать**: оперировать современными образовательными и информационными технологиями; **Уметь**: с помощью передовых технологий накапливать научный и профессиональный опыт; **Владеть**: современным образовательным и информационным инструментарием	Существенные пробелы при изучении современных образовательных и информационных технологий	Накопление научных и профессиональных знаний происходит не на достаточно высоком уровне	Достаточно эффективно и в ногу со временем осуществляется приобретение и накопление новых научно-профессиональных знаний

ПК-2

Схема оценки уровня формирования компетенции «способность понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	**Знать**: современный математический аппарат; **Уметь**: совершенствовать и применять в	Достаточно слабые знания основных математических дисциплин, составляющих контур прикладной	Допускает неточности при реализации на практике соответствующих знаний	Четко понимает и применяет на практике современный математический аппарат

	приложениях соответствующие знания; **Владеть**: современными математическими методами	математики		

ПК-4

Схема оценки уровня формирования компетенции «способность работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	**Знать**: иметь соответствующую профессиональную подготовку; **Уметь**: работать в составе научно-исследовательского и производственного коллектива и решать задачи профессиональной деятельности; **Владеть**: профессиональными качествами	Слабая профессиональная подготовка	Хорошо ориентируется в составе научно-исследовательского и производственного коллектива, справляется с соответствующими задачами	Блестяще демонстрирует высокие научно-профессиональные качества в составе производственного коллектива

ПК-8

Схема оценки уровня формирования компетенции «способность приобретать и использовать организационно-управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	**Знать**: организацию и планирование необходимых профессиональных навыков и ресурсов; **Уметь**: использовать организационно-	Недостаточные организационно-управленческие навыки	Несущественные недочеты при реализации накопленных организационно-управленческих навыков в	Отличная коммуникабельность и умение использовать организационно – управленческие

	управленческие навыки в профессиональной и социальной деятельности; **Владеть**: организационно-управленческими навыками в профессиональной и социальной деятельности		профессиональной и социальной деятельности	навыки в профессиональной и социальной деятельности

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительная оценки по дисциплине быть не может.

7.3 Типовые контрольные задания и тесты

По каждому модулю предусмотрена одна контрольная работа или один тест.

Примерная контрольная работа по модулю 1

Интерполяция функции одной переменной и численное интегрирование

Вариант 0

1. Для функции $f(x)=\dfrac{2x}{4x+1}$ по ее значениям в узлах $0,\ \dfrac{1}{2},$ 1 построить интерполяционные многочлены в формах Лагранжа и Ньютона. Найти погрешность интерполяции в точке $x=\dfrac{1}{4}$.
2. Пусть $f(x)=4x(2x-1)(3x-1)(4x-1)$. Найти разделенную разность $f(0;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};1)$.
3. Пусть $f(x)=x^3+x,\ \ x_i=ih,\ \ i\in Z$. Найти конечную разность $\Delta^3 f_1$.
4. Пусть $a=3{,}62\pm 0{,}04;\ \ b=0{,}2\pm 0{,}08$. Вычислить $c=a+2b$ и найти абсолютную и относительную погрешности вычисления c.
5. Найти приближенное значение $I_{пр}$ интеграла $I=\int\limits_1^2 |3-2x|x\,dx,$ по квадратурной формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на 4 равные части. Вычислить $|I-I_{пр}|$.

6. На какое наименьшее число равных частей надо разбить отрезок интегрирования, чтобы вычислить интеграл $\int_{-1}^{2} \frac{x}{2+x} dx$ по квадратурной формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$?

Примерный тест по численным методам на 3 курсе по модулю 1

Интерполяция функции одной переменной и численное интегрирование

Вариант 0

1.Если a=0,896 и его относительная погрешность $\delta = 10\%$, то абсолютная погрешность равна …

1) 0,6; 2) 0,1; 3) 0,06; 4) $0{,}9 \cdot 10^{-1}$; 5) $0{,}8 \cdot 10^{-1}$.

2. Число 0,01204 округлили до трех значащих цифр. Абсолютная погрешность полученного приближенного числа равна …

1) 0,04; 2) 0,002; 3) $0{,}4 \cdot 10^{-4}$; 4) 0,001; 5) $0{,}2 \cdot 10^{-4}$.

3. Относительная погрешность в % числа a =6,0612 ± 0,006 равна …

1) 1 %; 2) 0,01 %; 3) 0,2 %; 4) 12 %; 5) 2 % .

4. Число 0,0020068 округлили до трех значащих цифр. Абсолютная погрешность полученного приближенного числа равна …

1) $0{,}4 \cdot 10^{-4}$; 2) 0,04; 3) 0,002; 4) 0,001; 5) $0{,}2 \cdot 10^{-4}$.

5. Пусть $a = 4{,}457 \pm 3 \cdot 10^{-3}$, $b = 12{,}0422 \pm 6 \cdot 10^{-4}$, $c = 2a + 5b$. Абсолютная погрешность вычисления c равна …

1) $3{,}3 \cdot 10^{-3}$; 2) $2 \cdot 10^{-4}$; 3) $8{,}2 \cdot 10^{-3}$; 4) $6{,}8 \cdot 10^{-4}$; 5) $9 \cdot 10^{-3}$.

6. Пусть a =0,07088. Значащими цифрами числа a являются …

1) 7088; 2) все его цифры ; 3) 88; 4) 07088; 5) нет значащих цифр.

7. Для функции $f(x) = (1-4x)\sin \pi x$ строится интерполяционный многочлен $L_2(x)$ по ее значениям в узлах $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{1}{2}$. Его значение $L_2(\frac{1}{8})$ равно ...

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{2}{15}$; 4) $\frac{2}{17}$; 5) $\frac{3}{122}$.

8. Сумма разделенных разностей $f(0;1;2) + f(1;2;3)$ для функции $f(x) = x \sin \frac{\pi x}{2}$ равна …

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) 0.

9. Разделенная разность $f(0;1;2;...;10)$ для функции $f(x) = x^3 + \sin \pi x$ равна …

1) 0; 2) 10^{-3}; 3) 10^3; 4) 3; 5) 1.

10. Интерполяционный многочлен для функции $f(x) = (4x-1)(3x-1)(2x-1)x$ по ее значениям в узлах $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = 1/3, \; x_3 = 1/2$ имеет вид

1) $4x^3$; 2) $4x^3 + 2x$; 3) $4x^3 - 2x$; 4) $x + 4x^3$; 5) 0.

11. Пусть $f(x) = x^3 + x^2, x_i = ih, i \in Z$. Конечная разность назад $\nabla^2 f_2$ равна …

1) $6h^3$; 2) $6h^3 + 2h^2$; 3) 0; 4) $6h^3 - h^2$; 5) $6h^3 + 3h^2$.

12. Пусть $f(x) = x^3 - \sin 10\pi x, x_i = 0{,}1 * i, i \in Z$. Конечная разность вперед $\Delta^3 f_0$ равна …

1) $-0{,}003$; 2) 6; 3) 0,003; 4) 0,006; 5) 0.

13. Многочлен Чебышева второй степени на отрезке [0;2] имеет вид:

1) $2x^2 - 2x - 1$; 2) $2x^2 - 1$; 3) $2(x+1)^2 - 1$; 4) $2(x-1)^2 - 1$; 5) $(x+1)^2 - 2$

14. Значение интеграла $\int_0^1 (x+1)\sin^2 \pi x dx$, вычисленного по квадратурной формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на две равные части, равно…

1) $\frac{7}{6}$; 2) 1; 3) 0,75; 4) 1,25; 5) 0,9.

15. Значение интеграла $\int_0^1 (x+1)\sin^2 \frac{\pi x}{2} dx$, вычисленного по квадратурной формуле правых прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на две равные части, равно…

1) 0,9; 2) 1,25; 3) 0,75; 4) $\frac{7}{6}$; 5) $\frac{11}{8}$.

16. Значение интеграла $\int_0^1 x^2 |1-2x| dx$, вычисленного по квадратурной формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на две равные части, равно …

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{3}{11}$; 4) $\frac{3}{15}$.

17. Пусть В- значение интеграла $A = \int_0^1 x|1-2x| dx$, вычисленного по квадратурной формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на две равные части. Тогда $|B - A| = …$

1) $\frac{3}{20}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{10}$.

18. Значение интеграла $\int_0^{1/2} x\sin 2\pi x dx$, вычисленного по простейшей квадратурной формуле Симпсона, равно …

1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{3}{35}$; 3) $\frac{4}{27}$; 4) $\frac{5}{61}$.

Примерная контрольная работа по модулю 2

Численные методы алгебры

Вариант 0

1. Сходится ли матричная геометрическая прогрессия

E+A+A^2+…? Если сходится, то найти ее сумму.

2. Найти первую и вторую нормы матрицы A и соответствующие нормы вектора b.

4б

3. Найти третью норму матрицы A.

4. Записать в развернутой форме метод простой итерации $x^{k+1} = Bx^k + c(k = 0,1,2,...)$ для системы $x = Bx + c$ и проверить его сходимость.

5. При каких значениях параметра p сходится метод простой итерации $x^{k+1} = Bx^k + c$ для системы $x = Bx + c$?

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -8 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 4. $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ 5. $B = \begin{pmatrix} p & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6. Дано уравнение $2x^3 + x - 2 = 0$. Выбрать x_0 – начальное приближение так, чтобы метод Ньютона сходился. Составить итерационный процесс Ньютона, найти x_3 и оценить погрешность.

7. Составить сходящийся к решению уравнения $2x^3 + 3x - 3 = 0$ процесс метода простой итерации. Найти x_3- третье приближение к решению и оценить погрешность

Примерный тест по численным методам на 3 курсе по модулю II

Численные методы алгебры

1. Третья норма матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ равна…

1) 2; 2) $\sqrt{2}$; 3) 0,5; 4) $\sqrt{5}$.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & -a & -1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$. Тогда уравнению $\| A \|_1 + \| A \|_2 = 13$ удовлетворяют значения $a = \ldots$

1) 4; 2) –3 и 3; 3) –1 и 1; 4) 3; 5) –2 и 2.

3. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & -0{,}25 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$. Существует $\lim\limits_{m\to\infty} A^m$, если

1) $a \in (-0{,}5; 0{,}5)$; 2) $a \in (-\sqrt{1{,}5}; \sqrt{1{,}5})$; 3) $a \in \left(-\sqrt{1{,}25}; \sqrt{1{,}25}\right)$.

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & -\frac{1}{2} \\ 2 & a \end{pmatrix}$, где a – параметр. Все действительные значения a, при которых ряд $E + A + A^2 + \ldots$ сходится, принадлежат множеству:

1) $\varnothing$; 2) $(-1;1)$; 3) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

5. Пусть вектор $x^0 = (0;0;0)$ – начальное приближение к решению СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 1, \\ x_2 = 0.1x_1 - 0.2x_3 - 1, \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0{,}2x_3 + 2 \end{cases}$$

методом простой итерации. Тогда второе приближение к решению данной СЛАУ имеет вид:

1) $(1;\ -1;\ 2)$; 2) $(1{,}5;\ 1{,}3;\ -1.1)$; 3) $(1{,}5;\ 1{,}.3;\ 2)$; 4) $(1{,}5;\ -1{,}3;\ 2.4)$.

6. Метод простой итерации $x^{k+1} = Bx^k + c$ для системы $x = Bx + c$, где $B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ a^2 & -a \end{pmatrix}$, расходится при любом начальном приближении, если:

1) $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $a = \frac{1}{\pi}$; 3) $a = -e^{-1}$; 4) $a = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x+3} dx$; 5) $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Пусть вектор $(0;\ 0;\ 0)$ – начальное приближение к решению СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 = -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.1x_3 + 2, \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.1x_2 - 0.2x_3 + 1, \\ x_3 = 0.1x_1 - 0.1x_2 - 1 \end{cases}$$

методом Зейделя. Тогда первое приближение к решению данной СЛАУ имеет вид:

1) $(2;\ 1{,}5;\ -0{,}85)$; 2) $(2;\ 1{,}1;\ -1{,}12)$; 3) $(1;\ 0{,}2;\ 1{,}1)$; 4) $(2;\ 1{,}2;\ -0{,}92)$;
5) $(1;\ 0{,}2;\ 1{,}3)$.

8. Выберите верные утверждения.

Метод простой итерации применяется к нахождению приближенного решения уравнения $x = g(x)$, взяв за начальное приближение $x_0 = 0$. Тогда $x_1 = \frac{1}{3}$ является первым приближением к решению этого уравнения, если

1) $g(x) = \frac{x + 2 + \sin 2x}{6 + x^2}$; 2) $g(x) = \frac{3x + \cos x}{x^2 + 3}$; 3) $g(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x^4 + 3}$;

4) $g(x) = \frac{x + 2e^x}{x^4 + 5}$.

Таблица ответов

1	2	3	4	5	6	7	8

Примерная контрольная работа по модулям 3,4

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Вариант 0

1. Найти приближенное решение $y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{x^2+1} - (x-1)^2, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

на отрезке [0;0,4], разлагая $y(x)$ в ряд Тейлора с четырьмя членами разложения. Найти

$$\max_{0 \le x \le 0,4} \left| y(x) - x^2 - 1 \right|.$$

2. Методом Эйлера с шагом $h = 0{,}1$ найти приближенно $y(0{,}3)$, где $y(x)$ – решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x(y-x)^2 - x^3 + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3. Описать как найти $y(0{,}5)$, используя явную формулу Адамса

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})}{2}$$

с шагом $h = 0{,}1$, как затем уточнить это значение, используя неявную формулу Адамса.

4. Привести вывод явной двухшаговой формулы Адамса.

5. Найти методом прогонки $y(0{,}2)$, где $y(x)$ - решение задачи:

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{y}{x^2+1} = 1, \ 0 < x < 0{,}3, \\ y(0) = 1, \ y(0{,}3) = 1{,}09. \end{cases}$$

6. Найти методом стрельбы $y(1{,}2)$, где $y(x)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} y'' - xy = 2 + x - x^3, \ 1 < x < 1{,}3, \\ y(1) = 0, \ \ y(1{,}3) = 0{,}69. \end{cases}$$

Примерная контрольная работа по модулю 5.

Численные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными

Вариант 0

1. Написать разностную схему, аппроксимирующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x+t)\frac{\partial u}{\partial x} + x^2 + t^2,$$

u(x,0) = x.

2. Определить порядок аппроксимации смешанной граничной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (x^2 + t^2 + 1)u = 1, \quad 0 < t \le 1,\ 0 < x < 1,$$

$$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1,$$

$$u(0,t) = t,$$

$$u(1,t) = 1 + t,\ 0 \le t \le 1.$$

разностной схемой

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - (x_m^2 + t_n^2 + 1)\frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2} = 1,$$

$$m = \overline{1, M-1},\ n = \overline{0, N-1},$$

$$u_m^0 = 0,\ m = \overline{0, M},$$

$$u_0^n = t_n,\ u_M^n = 1 + t_n,\quad n = \overline{0, N},$$

где $x_m = mh,\ t_n = n\tau,\ m = \overline{0, M},\ n = \overline{0, N}.$

3. Написать разностную схему, аппроксимирующую на сетке

$\left\{x_m = mh,\ y_n = nl,\quad m = \overline{0, M},\quad n = \overline{0, N}\right\}$ задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 + y^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = x^2,\ u(x,1) = 1 + x^2,\ u(0,y) = y^2,\quad u(1,y) = 1 + y^2. \end{cases}$$

Какими методами можно найти решение полученной разностной схемы?

4. Определить порядок аппроксимации задачи Дирихле в области D={0<x<1, 0 < y<2} с границей Г

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y^2, \quad (\mathrm{x, y}) \in \mathrm{D},$$
$$\mathrm{u}\big|_{\Gamma} = 0$$

разностной схемой

$$\begin{cases} \dfrac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \dfrac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2} = \dfrac{x_{m+1}^2 + y_{n+1}^2 + x_{m-1}^2 + y_{n-1}^2}{2}, \\ u\,|_{\Gamma_h} = 0 \end{cases}$$

на сетке (x_m, y_n) $\in D_h^0$, $x_m = mh$, $y_n = nl$, где D_h^0, Γ_h –внутренняя сеточная область и сеточная граница соответственно.

5. Какую задачу и с каким порядком аппроксимирует на сетке

$\{x_m = mh,\ \ y_n = nl,\ \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ разностная схема

$$\begin{cases} \dfrac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \dfrac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} = \dfrac{e^{x_{m+1}} + e^{x_{m-1}}}{2} + y_n, \\ u_m^0 = x_m^2 + 1, \quad \dfrac{u_m^1 - u_m^0}{h} = 2x_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} ?$$

Привести соответствующий этой разностной схеме шаблон. Сходится ли решение этой разностной схемы к решению соответствующей задачи, если $l > h$? Почему?

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Конечный результат складывается как средневзвешенная оценка текущего и промежуточного контролей соответственно с весами 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 15баллов;

-участие в практических занятиях – 25 баллов;

-самостоятельная работа – 10 баллов;

-зачет по лабораторным работам – 30;

-письменная контрольная работа – 20;

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

-экзамен – 100 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.

а) основная литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. Наука, 1987.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения). М. Высшая школа, 2000.
3. Сборник задач под редакцией Монастырного П.И. Минск, 1969.
4. В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. Вычислительные методы т.1 и т.2 М.: Наука, 1976, 1977.
5. Абдурагимов Э.И., Бейбалаев В.Д. *Численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Лабораторные задания и методические указания по численным методам. //* ДГУ, Махачкала, 2011
6. Абдурагимов Э.И., Бейбалаев В.Д. *Метод сеток решения уравнений параболического типа . Лабораторные задания и методические указания по численным методам. //* ДГУ, Махачкала, 2010
7. Абдурагимов Э.И., Кадиев Р.И. *Приближенное вычисление интегралов. Лабораторные задания и методические указания по численным методам. //* ДГУ, Махачкала, 2010.

б) дополнительная литература

8. У.Г. Пирумов. Численные методы. М.: Дрофа, 2003.
9. Волков Е.А. Численные методы. М. Наука, 1987.
10. Бахвалов Н.С., Лапин А.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М. Высшая школа, 2000.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. Федеральный портал российское образование http://edu.ru;
2. Электронные каталоги Научной библиотеки Даггосуниверситета http://elib.dgu.ru/?q=node/256;
3. Образовательные ресурсы сети Интернет http://catalog.iot.ru/index.php;
4. Электронная библиотека http://elib.kuzstu.ru.

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Перечень учебно-методических изданий, рекомендуемых студентам для подготовки к занятиям представлен в разделе «Учебно-методическое обеспечение. Литература».

Лекционный курс. Лекция является основной формой обучения в высшем учебном заведении. В ходе лекционного курса проводится систематическое изложение научных и познавательных материалов, освещение основных понятий дисциплины и закрепление теоретического материала.

В тетради для конспектирования лекций необходимо иметь поля, где по ходу конспектирования студент делает необходимые пометки. Записи должны быть избирательными, своими словами, полностью следует записывать только определения. В конспектах рекомендуется применять сокращения слов, что ускоряет запись. Вопросы, возникшие у студента в ходе лекции, рекомендуется записывать на полях и после окончания лекции обратиться к преподавателю за разъяснением.

Студенту необходимо активно работать с конспектом лекции: после окончания лекции рекомендуется перечитать свои записи, внести поправки и дополнения на полях. Конспекты лекций можно использовать при подготовке к экзамену, контрольным тестам, при выполнении самостоятельных заданий.

Практические занятия. Практические занятия по «Численным методам» имеют цель закрепить теоретические знания по численным методам, изложенные на лекции, решая практические задачи. На практическом занятии студент должен иметь тетрадь для практических занятий, в которую записываются все задачи решенные в аудитории и дома самостоятельно.

Важное место в самостоятельной работе студентов должна занимать работа в образовательной среде ИНТЕРНЕТ. Такие ресурсы указаны в разделе «Программное обеспечение и интернет ресурсы» данного УМК.

Лабораторные занятия. На лабораторных занятиях студент должен научиться решать с помощью ЭВМ практические задачи математического анализа, алгебры, дифференциальных уравнений, физики и техники, пользуясь численными методами. При этом главное–научиться составлять алгоритмы решения задач и по этим алгоритмам составлять программы решения задач на ЭВМ, пользуясь языками программирования и (или) пакетами прикладных программ.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для успешного освоения дисциплины, обучающийся использует следующие программные средства: пакеты для решения задач математического программирования: Mathcad, Статистика, а также интернет-ресурсы.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Имеются компьютерные классы с современными персональными компьютерами и методические указания к выполнению лабораторных работ, в библиотеке ДГУ имеется соответствующая литература, имеются методические разработки, размещенные в Интернет ДГУ.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Примерные тестовые задания

Примерный тест по курсу «Численные методы»

Т Е С Т

1. Найти значение разделенной разности $f(x_0;x_1;x_2;x_3)$, если $f(x)=\dfrac{x^2-x^4}{1+2x}$,

$x_0 = 0$; $x_1 = ½$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

1). 1; 2).0; 3). –1/2; 4).-1/4 5). ½ .

2. Найти значение разделенной разности $f(x_0;x_1;x_2;x_3)$, если $f(x) = \dfrac{x - x^3}{x^2 + 1}$,

$x_0 = 0$; $x_1 = ½$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$.

1). 3/10; 2).0; 3).-8/5; 4).3/8; 5).-4/5.

3. Функция f(x) задана таблично

x	0	1/2	1
F(x)	0	1/4	1/3

Найти приближенно $f'(1/2)$, заменяя на отрезке[0, 1] функцию f(x) интерполяционным

многочленом второй степени.

1). 1/4; 2).- 1/4; 3). 1/2; 4). 0; 5). 1/3.

4. Интеграл $\int_2^5 (x^3 - 4x^2 + 3)dx$

вычислен по квадратурной формуле Симпсона с шагом h = 0.1. Чему равен модуль

погрешности метода?

1). 0.0002...; 2). 0; 3). 0.0014; 4). 0.0041...; 5). 0.0005... .

5. Наибольшая степень многочлена, для которого точна квадратурная формула Гаусса с тремя узлами, равна

1). 4; 2). 3; 3). 2; 4). 5; 5).6.

6. Пусть $h = \dfrac{b-a}{N}$ - шаг интегрирования, $x_i = a + ih$, i = 0, 1, 2, ... , N,

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Квадратурная формула трапеций имеет вид:

1). $I \approx \dfrac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)\right)$;

2). $I \approx h\sum_{i=0}^{N} f(x_i)$;

3). $I \approx h\sum_{i=0}^{N} f(x_i + \dfrac{h}{2})$;

4). $\mathrm{I} \approx h(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{N} f(x_i))$;

5). $\mathrm{I} \approx h/2*(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i))$;

7. Пусть $f(x) = \sin \pi x + x^2 + 4x + 1$, $x_i = i$, $i \in Z$. Найти конечную разность вперед $\Delta^4 f_1$

1). 0; 2). 4; 3). 12; 4). 24; 5). 16.

8. Пусть $P_4(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, где a,b,c,d–произвольные числовые коэффициенты. Какое наименьшее значение может принять $\max\limits_{-1\le x\le 1}|P_4(x)|$?

1). 1; 2). 1/2; 3). 1/4; 4). 1/8; 5). 1/16 .

9. Пусть $f(x) = \sin \pi x + x^{49} + 4$, $x_i=i$, $i\in Z$.

Найти конечную разность вперед $\Delta^{50} f_0$.

1). 4; 2). 50; 3). 0; 4). 49!; 5). 5.

10. Пусть $h = \frac{b-a}{2n}$, $x_i = a + ih$, , $i = 0,2,\ldots,2n$. Квадратурная формула Симпсона имеет вид:

1). $$I \approx \frac{h}{6}[f(a)+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}))+ \\ +2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n}))+f(b)];$$

2). $$I \approx \frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2}))+ \\ +2(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1})]$$

3). $$I \approx \frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}))+ \\ +f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2})]$$

4). $$I \approx \frac{h}{3}[\frac{f(a)+f(b)}{2}+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}))+ \\ +2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2}))];$$

5). $$I \approx \frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}))+ \\ +2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2}))];$$

11. Вычислить интеграл $\int_0^1 x|2x-1|dx$ по квадратурной формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на 4 равные части.

1). 1/2; 2). 3/4; 3). 1/4; 4). 1/3; 5). 3/2 .

12. Указать для какой функции f(x) многочлен 4 x является интерполяционным многочленом, построенным по ее значениям в узлах 0; 1; 2.

1). $f(x) = x\,2^{x+1}$; 4). $f(x) = (3x - x^2)\,2^x$;

2). $f(x) = x^4 - 2x^2 + 8x$; 5). $f(x) = 2^x\, x(x-1)(x-2)$.

3). $f(x) = 4\sin \pi x$;

13. Пусть $f(x) = (1-x)\cos \pi x$, $x_i = i$, $i = 0, 1, 2$.

Какой из приведенных ниже многочленов является интерполяционным многочленом, построенным по значениям функции f (x) в узлах x_0, x_1, x_2 ?

1). x ; 2). $x^2 + x$; 3). $1 - x$; 4). $1 - x^2$; 5). $x^2 - 2x + 1$;

14. Вычислить интеграл $\int_0^1 |\cos 2\pi x|\, dx$ по квадратурной формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на 3 равные части.

1). 2/3; 2). 1; 3). 2/5; 4). $\sqrt{3}/2$; 5). $2/\pi$.

15. Вычислить интеграл $\int_1^2 x|2x-3|dx$ по квадратурной формуле Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 2 равные части.

1). 2/5; 2). 3/4; 3). 1/2; 4). 3/2; 5). 5/4 .

16. Многочлен Чебышева второй степени, заданный на отрезке [0; 2], имеет вид

1). $2(x-1)^2 - 1$; 2). $x^2 - 2x - 1$; 3). $4x^2 - 3$; 4). $(x-1)^2 - 1$; 5). $2x^2 - 1$.

17. . Пусть $f(x) = \sin 2\pi x + x^3 + 3x^2 + 1$, $x_i = i$, $i \in Z$. Найти конечную разность назад $\nabla^4 f_0$.

1). 0; 2). -4; 3). 1; 4). 6; 5). 5.

18. Функция f(x) задана таблично

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
f(x)	0	1.5	2	2.25	2.4	2.5

Найти приближенно $f'(0.3)$ и $f''(0.3)$, используя формулу численного дифференцирования второго порядка точности.

1). 1.5 и –8.2; 2). 2 и –10/9; 3). 1 и –7.5; 4). 4 и –12; 5). 0.5 и –6.5.

19.Интеграл $\int_1^2 f(x)dx$ можно вычислить по квадратурной формуле трапеций, разбив отрезок интегрирования на 4 равные части, с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$, если

1). $f(x)= x^3$; 2). $f(x) = 2x-3$; 3). $f(x)= x + e^x$; 4). $f(x) = x^2 \sin \pi x$; 5). $f(x) = 1/x$.

20. Указать какое из приближенных равенств точнее?

1). $1/3 \approx 0.3$; 2). $\sqrt{2} \approx 1.41$; 3). $\pi \approx 3.14$; 4). $7/3 \approx 2.3$; 5). $370/9 \approx 41.1$.

Таблица ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

2. Примерные билеты

Экзаменационный билет № 1
по численным методам

1. Существование и единственность интерполяционного многочлена.
2. Метод простой итерации решения СЛАУ. Необходимые и достаточные условия сходимости.

3. Методом Эйлера с шагом h=0.1 найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} y' = y - x^2 + 2x, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

в точке x=0.2.

Экзаменационный билет № 2
по численным методам

1. Интерполяционный многочлен Лагранжа, определение, вывод формулы.

2. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения колебания струны.

3. Вычислить интеграл $\int_0^1 |1-4x|dx$ по квадратурной формуле средних прямоугольников, разбив отрезок интегрирования на 4 равные части, найти точное значение этого же интеграла и сравнить их.

Экзаменационный билет № 3

по численным методам

1. Остаточный член интерполяционного многочлена Лагранжа.
2. Теорема об оценке погрешности метода простой итерации решения СЛАУ.
3. Вычислить интеграл $\int_0^1 |x-2x^2|dx$ по квадратурной формуле трапеции, разбив отрезок интегрирования на 4 равные части, найти точное значение этого же интеграла и сравнить его с вычисленным по квадратурной формуле.

Экзаменационный билет № 4

по численным методам

1. Разделенные разности и их свойства.
2. Метод Зейделя решения СЛАУ. Необходимое и достаточное условие сходимости.
3. Найти второе приближение к решению уравнения $x^3 - x - 3 = 0$ методом Ньютона, выбрав начальное приближение так, чтобы метод Ньютона сходился.

Экзаменационный билет № 5

по численным методам

1. Интерполяционный многочлен Ньютона, вывод формулы.
2. Метод сеток решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

3. Построить методом Ньютона сходящийся итерационный процесс к решению уравнения $x^3 - 4x + 1 = 0$. Найти второе приближение к решению и оценить его погрешность.

Экзаменационный билет № 6

по численным методам

1. Запись формулы остаточного члена интерполяции с помощью разделенных разностей.

2. Итерационно-степенной метод нахождения наибольшего по модулю действительного собственного значения матрицы.

3.Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}$ по квадратурной формуле Гаусса с тремя узлами. Сравнить полученное значение с точным.

Экзаменационный билет № 7

по численным методам

1.Конечные разности и их свойства.

2. Метод половинного деления решения нелинейного уравнения с одним неизвестным. Сходимость, оценка погрешности.

3. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f\,)x) = x/(2+x)$ по значениям $f(x)$ в узлах $x_0 = 0, x_1 = 0.5, \mathrm{x}_2 = 1$. Оценить погрешность интерполяции на всем отрезке по формуле остаточного члена.

Экзаменационный билет № 8

по численным методам

1. Численное дифференцирование. Вывод формул численного дифференцирования, оценка погрешности.

2. Метод простой итерации приближенного решения нелинейного уравнения. Теорема о его сходимости и оценке погрешности.

3. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f)x) = 1/(1+x)$ по значениям $f(x)$ в узлах $x_0 = 0, x_1 = 0.5, \mathrm{x}_2 = 1$. Оценить погрешность интерполяции на всем отрезке по формуле остаточного члена.

Экзаменационный билет № 9
по численным методам

1. Элемент наилучшего приближения в линейном нормированном пространстве. Теорема о существовании.
2. Метод простой итерации приближенного решения одного уравнения с одним неизвестным. Сходимость, оценка погрешности.
3. Для функции $f(x) = (2x-1)/x$ построить интерполяционный многочлен Ньютона по значениям $f(x)$ в узлах $x_0 = 1, x_1 = 1.25, x_2 = 1.5.$ Оценить погрешность интерполяции на отрезке $[1, 1.5]$ по формуле остаточного члена.

Экзаменационный билет № 10
по численным методам

1. Многочлен наилучшего приближения. Критерий Чебышева (чебышевский альтернанс).
2. Метод Ньютона приближенного решения одного уравнения с одним неизвестным. Сходимость, оценка погрешности.
3. Функция f(x) задана таблично:

x	0	1/2	1
f(x)	1	1/3	0

Найти приближенно $f'(1/2)$ и $f''(1/2)$. Оценить погрешность.

Экзаменационный билет № 11

по численным методам

1 Квадратурные формулы прямоугольников. Остаточный член, оценка погрешности.

2. Приближенный метод Тейлора решения задачи Коши для ОДУ первого порядка.

3. Вычислить разделенную разность $f(0;1;2;...;100)$, если $f(x) = x(x-1)...(x-99)$.

Экзаменационный билет № 12

по численным методам

1. Квадратурные формулы трапеций. Остаточный член, оценка погрешности.

2. Численный метод Эйлера решения задачи Коши для ОДУ первого порядка.

3. Функция f(x) задана таблично:

x	0	5/4	3/2
f(x)	1/2	5/9	3/5

Вычислить $f'(1)$, полагая $f'(\mathrm{x}) \approx L_n'(\mathrm{x})$, где $L_n(\mathrm{x})$- интерполяционный многочлен, построенный по значениям f(x) в заданных узлах.

Экзаменационный билет № 13

по численным методам

1. Квадратурные формулы Симпсона. Остаточный член, оценка погрешности.

2. Методы Рунге - Кутта решения задачи Коши для ОДУ первого порядка. Вывод формул второго порядка точности.

3. Пусть $f(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$, x_i различны. Показать, что $f(x_0; x_1;...; x_p) = 0$ при $p \le n$.

Экзаменационный билет № 14

по численным методам

1. Правило Рунге практической оценки погрешности.
2. Оценка погрешности одношаговых методов.
3. Найти конечную разность четвертого порядка $\Delta^4 f_1$ для функции $f(x) = x - \sin \pi x$, если $x_i = 0.5i,\ i \in Z.$

Экзаменационный билет № 15

по численным методам

1. Нормы векторов и матриц. Три нормы векторов. Сходимость последовательностей векторов и матриц.
2. Основные понятия теории разностных схем (узел, сетка, аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости).

3 Составить методом простой итерации сходящийся итерационный процесс к решению системы

$$\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 11, \\ 2x + 5y - z = 13, \\ 3x \qquad + 4z = -1. \end{cases}$$

Найти 2 последовательных приближения к решению и оценить погрешность.

Экзаменационный билет № 16

по численным методам

1. Матричная геометрическая прогрессия. Необходимые и достаточные условия сходимости геометрической прогрессии. Оценка нормы остаточного члена.
2. Связь между аппроксимацией, устойчивостью и сходимостью.

3. Методом Тейлора найти решение задачи Коши: $y' = xy - 2x^2 - x + 2,\ y(0) = 1$ на отрезке [0,0.2]. Оценить погрешность.

Экзаменационный билет № 17

по численным методам

1. Метод Гаусса решения СЛАУ, схема алгоритма оптимального исключения.
2. Разностная схема, аппроксимирующая простейшую двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка со вторым порядком аппроксимации.
3. Пусть $a = 2{,}4696 \pm 0{,}002, \quad b = 0{,}0847 \pm 0{,}001$. Чему равны абсолютная и относительная погрешности вычисления $2a + 3c$?

Экзаменационный билет № 18

по численным методам

1. Основные понятия теории погрешности (абсолютная и относительная погрешности, значащие и верные цифры числа).
2. Метод сеток решения задачи Коши для уравнения теплопроводности
3. Методом половинного отрезка [1,2] найти третье приближение к решению уравнения $x^4 + 4x - 1 = 0$. Оценить погрешность приближения.

Экзаменационный билет № 19

по численным методам

1. Абсолютные и относительные погрешности суммы, разности, произведения и частного.

2. Разностная схема, аппроксимирующая простейшую двухточечную краевую задачу для линейного дифференциального уравнения второго порядка со вторым порядком аппроксимации.

3. Составить сходящийся итерационный процесс Зейделя к решению системы

$$\begin{cases} 5x - 2y - 8, \\ 3x + 4y = 10. \end{cases}$$

Найти 3 последовательных приближения к решению. Сравнить третье приближение с точным решением.