

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Федеральное государственное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
**ТЕОРИЯ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА**

**Кафедра:** дифференциальных уравнений и функционального анализа  
**Факультете:** математики и компьютерных наук

Образовательная программа  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Профили подготовки  
«Математический анализ и приложения»

Уровень высшего образования:  
бакалавриат

Форма обучения:  
очная

Статус дисциплины:  
вариативная часть, дисциплина по выбору

-----  
Махачкала - 2017

Рабочая программа дисциплины: **Теория меры и интеграла**  
составлена 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по  
направлению подготовки **02.03.01 Математика и комп. науки** (  
бакалавриат)

Приказ Минобрнауки России от 12. 03 2015 №228

Разработчик: к. ф.-м.н., доцент **Рагимханов Вадим Римиханович**

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании  
кафедры: дифференциальных уравнений и функционального  
анализа от "22" марта 2017 г. протокол № 6

Заведующий кафедрой  Сиражудинов М.М.

на заседании Методического совета факультета  
Математики и компьютерных наук от 24 марта 2017 г.

Председатель 

Рабочая программа согласована с  
учебно-методическим  
управлением 30.03.2017 г.



## Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины4

1. Цели освоения дисциплины4

2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры4

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).5

4. Объем, структура и содержание дисциплины.6

5. Образовательные технологии9

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.9

Задания для самостоятельной работы9

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.11

Вопросы для самостоятельной работы15

Вопросы к экзамену по дисциплине16

**8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.18**

**9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.19**

**10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.20**

**12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.22**

### Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Теория меры и интеграла» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению 02.03.01 Математика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.

К основным задачам данного курса относятся изучение основных свойств аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и конструирование мер Стильеса, Стильеса-Бореля и Стильеса-Лебега на прямой с помощью функций ограниченной вариации.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:  
общепрофессиональных – ОПК-1,  
профессиональных – ПК-1, ПК-2, ПК-4.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: лекции, практические занятия и самостоятельная работа.

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: контрольной работа и коллоквиума, промежуточный контроль в форме экзамена.

Объем дисциплины 4 зачетных единиц, в том числе 144 в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						СРС, в том числе экзамен	Форма промежуточной аттестации (зачет, дифференцированный зачет, экзамен)
	в том числе							
	Контактная работа обучающихся с преподавателем							
	Всего	из них						
		Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации		
8	144	32		32			80	Экзамен

#### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины теория меры и интеграла является научить слушателей понимать основные положения абстрактной теории аддитивной, счетно-аддитивной функции множества и связь мер Стильеса, Бореля-Стильеса и Стильеса-Лебега функциями ограниченной вариации вещественного аргумента. Понятие и факты курса составляют фундамент многих разделов современного анализа.

#### 2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина теория меры и интеграла входит в вариативную часть образовательной программы по направлению 02.03.01 Математика

Знания по данному курсу необходимы при работе над диссертацией и в дальнейшей научно-исследовательской работе по выбранному направлению.

Предполагает знание основных понятий и методов математического анализа и общей топологии в рамках первых двух курсов математического факультета, а также знаний свойств функций основных классов функций действительного переменного.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	Обладать готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	Знать основные понятия и теоремы теории меры  Уметь давать сравнительный анализ разных понятий теории меры  Владеть навыками работы с различными классами множеств и аддитивных функций множества для адекватного применения в той или иной области математики или естественно-научных дисциплин.
ПК-1	способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе.  Уметь анализировать свойства основных классов множеств, применять их в прикладных задачах.  Владеть современными методами теории меры.
ПК-2	способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	Знать формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере.  Уметь доказывать существенность или необходимость исходных условий важнейших теорем интегрального исчисления путем построения соответствующих контрпримеров или путем сопоставления с другими широко известными математическими утверждениями.

		Владеть достаточной информацией о современном уровне развития анализа в разделах публично представляемых научных результатов.
ПК-4	способностью публично представлять собственные и известные научные результаты	<p>Знать: важнейшие свойства колец, алгебр, сигма-колец и сигма-алгебр множеств и аддитивных функций.</p> <p>Уметь: свойства функций множеств, заданных на полукольце, кольце или алгебре множеств.</p> <p>Владеть: методами теории множеств и теории меры для определения свойств функций множества.</p>

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 4, академических часов 144.

4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	л. занятия	бор. работы	Контр. сам. раб.		
<b>Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура</b>								
<i>Всего по модулю 1</i>	<b>8</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	контрольная работа
1. Основные классы множеств								
2. Порожденные классы множеств								
<b>Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства</b>								
<i>Всего по модулю 2</i>	<b>8</b>		<b>10</b>	<b>10</b>			<b>16</b>	коллоквиум, контрольная работа
1. Функции множества. Меры.								
2. Продолжение меры								
<b>Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента. Теория меры на прямой</b>								
<i>Всего по модулю 3</i>	<b>8</b>		<b>12</b>	<b>12</b>			<b>12</b>	контрольная работа
1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации								

2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации								
3. Мера Стильеса и Бореля-Стильеса								
4. Мера Стильеса-Лебега								
<b>Модуль 4. Промежуточная аттестация</b>								
Подготовка к экзамену							<b>36</b>	экзамен
<b>ИТОГО за 8 семестр</b>			<b>32</b>	<b>32</b>			<b>80</b>	

### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

#### **ЛЕКЦИИ**

#### **Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура**

##### *Тема 1. Основные классы множеств*

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы.

Измеримое пространство и измеримые функции.

##### *Тема 2. Порожденные классы множеств*

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

#### **Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства**

##### *Тема 1. Функции множества. Меры.*

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

##### *Тема 2. Продолжение меры*

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

#### **Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента. Теория меры на прямой.**

##### *Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

##### *Тема 2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.  
*Тема 3.. Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса*  
Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.  
*Тема 4. Мера Стильеса-Лебега*  
Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

## **ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ**

### **Модуль 1. Основные классы множеств, их свойства и структура**

#### *Тема 1. Основные классы множеств*

Нижний и верхний предел множеств, предел множеств. Кольцо, полукольцо и алгебра множеств. Сигма-кольцо и сигма-алгебра множеств. Монотонные классы. Измеримое пространство и измеримые функции.

#### *Тема 2. Порожденные классы множеств*

Минимальное кольцо, минимальная алгебра, минимальное сигма-кольцо, минимальная сигма-алгебра, минимальный монотонный класс содержащий данное семейство множеств. Теоремы о монотонном и сигма-кольце, порожденных кольцом. Борелевские множества и борелевская сигма-алгебра топологического пространства.

### **Модуль 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства**

#### *Тема 1. Функции множества. Меры.*

Функция множества. Конечные функции множества, сигма-конечные функции множества, конечно-аддитивные функции множества, сигма-аддитивные функции множества (= счетно-аддитивные функции множества), конечно-полуаддитивные функции множества, сигма-полуаддитивные функции множества (= счетно-полуаддитивные функции множества), неотрицательные функции множества, монотонные функции множества, непрерывные сверху и снизу функции множества, непрерывные функции множества. Меры.

Общие свойства аддитивных функций множества. Свойства аддитивных функций множества, заданных на полукольце и кольце.

#### *Тема 2. Продолжение меры*

Продолжение меры с полукольца на порожденное полукольцом кольцо. Внешняя мера. Измеримые по Каратеодори множества. Теорема Каратеодори. Полные меры. Измеримость множеств исходного кольца. Единственность продолжения. Теорема о приближении. Измеримое пространство, пространство с мерой, вероятностное пространство.

### **Модуль 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента.**

#### **Теория меры на прямой.**

#### *Тема 1. Функции вещественной переменной с ограниченной вариации*

Определение функции ограниченной вариации вещественного аргумента со значениями в метрическом пространстве. Свойства отображений ограниченной вариации.

#### *Тема 2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации*



Монотонные функции. Дифференцируемость монотонной функции. Абсолютно непрерывные функции. Вещественные функции ограниченной вариации вещественного аргумента. Критерий ограниченности полной вариации. Функции скачков и ее свойства. Дифференцирование и интеграл. Принцип выбора Хелли.  
*Тема 3.. Мера Стильеса и Бореля-Стилтьеса*  
Мера Стильеса. Мера Бореля-Стилтьеса.  
*Тема 4. Мера Стильеса-Лебега*  
Мера Лебега. Мера Лебега-Стилтьеса.

## 5. Образовательные технологии

В основе преподавания дисциплины *теория меры и интеграла* лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для обеспечения самостоятельной работы магистров использовать учебное пособие

- 1) Магомедов Г.А., Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Основы теории меры*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 1997.
- 2) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.
- 3) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. *Аддитивные функции множества и смежные вопросы*. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.

### Задания для самостоятельной работы

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$  - кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..

9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда).  
Пространства с мерой .
12. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

### Рефераты, доклады и задания по темам для самостоятельной работы

Разделы и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
<b>Раздел 1. Основные классы множеств, их свойства и структура</b>	
1. Основные классы множеств	Доклад на тему: Пи-классы и лямбда-классы множеств
2. Порожденные классы множеств	Доклад на тему: Приложения теоремы о монотонном классе
<b>Раздел 2. Конечно и счетно-аддитивные функции множества и их свойства</b>	
1. Функции множества. Меры.	Реферат на тему: Основные свойства функций множества.
2. Продолжение мер.	Доклад на тему: Измеримость по Каратеодори
<b>Раздел 3. Теория функций ограниченной вариации вещественного аргумента</b>	
1. Функции вещественной переменной с	Доклад на тему: функция скачков.

ограниченной вариации	
2. Вещественны функции вещественной переменной с ограниченной вариации	Доклад на тему: Теорема Хелли
<b>Раздел 4. Теория меры на прямой</b>	
1. Меры Стильтьеса и Бореля-Стилтьеса	Реферат на тему: Построение меры Лебега в $\mathbb{R}^1$
2. Мера Стильтьеса-Лебега	Доклады на темы: 1. Борелевские множества на прямой. 2. Суслинские множества на прямой.

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

### 7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура оценивания
ОПК-1	Знать: различные естественнонаучные модели, где возникают аддитивные функции множества и интегралы по ним. Уметь: создавать модели явлений, процессов и конструкций с использованием теории меры и интеграла. Владеть методами моделирования естественнонаучных задач на языке теории меры и интеграла.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-1	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе. Уметь анализировать свойства основных классов множеств, применять их в прикладных задачах. Владеть современными методами теории меры.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-2	Знать формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере. Уметь доказывать существенность или необходимость исходных условий важнейших теорем интегрального исчисления путем построения соответствующих контрпримеров или путем сопоставления с другими широко известными математическими утверждениями. Владеть достаточной информацией о современном уровне развития анализа в разделах публично представляемых научных результатов.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-4	Знать: важнейшие свойства колец, алгебр, сигма-колец и сигма-алгебр множеств и аддитивных функций. Уметь: свойства функций множеств, заданных на полукольце, кольце или алгебре множеств. Владеть: методами теории множеств и теории меры для определения свойств функций множества.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен

## 7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

### ОПК-1

Схема оценки уровня формирования компетенции «Готовностью использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Базовый	Знать основные понятия и теоремы теории меры  Уметь давать сравнительный анализ разных понятий теории меры	Знает основные определения теории метрических пространств, но допускает некоторые ошибки при формулировках	Знает основные определения теории метрических пространств, непрерывных отображений между ними, но допускает	Знает все определения теории метрических пространств, непрерывных отображений, теории меры и интеграла,
Высокий	Знать основные понятия и теоремы теории меры  Уметь давать сравнительный анализ	Знает основные определения и теоремы теории метрических пространств и абстрактной теории меры	Знает основные определения теории метрических пространств, непрерывных отображений между ними, абстрактной	Знает все определения теории метрических пространств, непрерывных отображений, теории меры и интеграла,

### ПК-1

Схема оценки уровня формирования компетенции «Обладать способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Базовый	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе.	Знает определения основных классов множеств  Умеет устанавливать, неравенство треугольника для норм в	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе.	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств и доказательства этих свойств, применяемых в

<b>Высокий</b>	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе.	Знает определения пространств полукольца, кольца, алгебры, сигма-кольца, сигма-алгебра и монотонного класса.	Знать определения и важнейшие свойства полукольца, кольца, алгебры, сигма-кольца, сигма-алгебра и монотонного класса, применяемых в	Знать определения и важнейшие свойства полукольца, кольца, алгебры, сигма-кольца, сигма-алгебра и монотонного класса,
----------------	--	--	---	---

#### ПК-2

Схема оценки уровня формирования компетенции «Обладать способностью математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
<b>Базовый</b>	Знать формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере.	Знает определения измеримого пространства, измеримого множества, измеримой функции.  Умеет устанавливать	Знает определения измеримого пространства, измеримого множества, измеримой функции; знает основные теоремы об	Знает определения измеримого пространства, измеримого множества, измеримой функции; знает основные
<b>Высокий</b>	Знать формулировки основных теорем о свойствах измеримых множеств и функций, о свойствах интеграла по счетно аддитивной мере.	Знает определения измеримого пространства, измеримого множества, измеримой функции; основные классы множеств, определение	Знает определения измеримого пространства, измеримого множества, измеримой функции; знает основные теоремы об	Знает определения измеримого пространства, измеримого множества, измеримой функции; знает основные

#### ПК-4

Схема оценки уровня формирования компетенции «Обладать способностью публично представлять собственные и известные научные результаты»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
<b>Базовый</b>	Знать: важнейшие свойства колец, алгебр, сигма-колец и сигма-алгебр множеств и аддитивных функций.  Уметь: свойства	Знает определения основных классов множеств  Умеет устанавливать, неравенство треугольника для норм в	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств, применяемых в современном анализе.	Знать определения и важнейшие свойства основных классов множеств и доказательства этих свойств, применяемых в

<b>Высокий</b>	Знать: важнейшие свойства колец, алгебр, сигма-колец и сигма-алгебр множеств и аддитивных функций.	Знает определения пространств полукольца, кольца, алгебры, сигма-кольца, сигма-алгебра и монотонного класса.	Знать определения и важнейшие свойства полукольца, кольца, алгебры, сигма-кольца, сигма-алгебра и монотонного класса, применяемых в	Знать определения и важнейшие свойства полукольца, кольца, алгебры, сигма-кольца, сигма-алгебра и монотонного класса,
	Уметь: свойства			

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительной оценки по дисциплине быть не может.

### 7.3. Типовые контрольные задания

#### Примерный перечень вопросов к коллоквиуму

1. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
2. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
3. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
4. Свойства аддитивной функции множества.
5. Свойства полной вариации а.ф.м..
6. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
7. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
8. Свойства положительной а.ф.м..
9. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
10. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
11. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
12. Непрерывность конечной положительной меры.
13. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
14. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
15. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
16. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
17. Лебеговский метод продолжения меры.
18. Теорема Хана о продолжении.
19. Теорема Александра о продолжении регулярной меры.
20. Мера Бореля.
21. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
22. Свойства функции ограниченной вариации
23. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.

24. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
25. Критерий функции ограниченной вариации.
26. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
27. Определение функции скачков и их свойства.
28. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
29. Свойства производной неопределенной полной вариации.
30. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
31. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
32. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
33. Полнота пространства функций ограниченной вариации.

### **Примерные контрольные работы**

#### **Вариант 1.**

1. Показать, что неотрицательная, аддитивная и сигма-полуаддитивная функция множества, заданная на кольце есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система всех подмножеств произвольного фиксированного множества является сигма-алгеброй.
3. Найдите полную вариацию функции на отрезке  $[a, b]$ .
4. Доказать, что система всех интервалов (включая пустой) на числовой прямой не является полукольцом.
5. Пусть  $R$  – кольцо. Доказать, что если мы возьмём симметрическую разность в качестве сложения и пересечение в качестве умножения, то  $R$  будет коммутативным кольцом в алгебраическом смысле, причем нулем этого кольца является пустое множество.
6. Докажите, что функция интегрируема по Лебегу на  $[0, 1]$  и найдите .

#### **Вариант 2.**

1. Доказать, что неотрицательная, аддитивная и непрерывная снизу на кольце функция множества есть мера на этом кольце.
2. Доказать, что система  $\mathcal{B}$  всех конечных подмножеств заданного множества  $A$  является кольцом.
3. Найдите полную вариацию функции на отрезке  $[0, \square]$ .
4. Доказать, что система всех отрезков (с добавлением пустого множества) на числовой прямой не является полукольцом..
5. Построить систему множеств, которая замкнута относительно операций пересечения и объединения, но не является даже полукольцом.
6. Докажите, что функция интегрируема по Лебегу на  $[0, 2]$  и найдите .

### **Вопросы для самостоятельной работы**

1. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
2. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$  - кольцо в произведении множеств.
3. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.
4. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.

5. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
6. Свойства аддитивной функции множества.
7. Свойства полной вариации а.ф.м..
8. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
9. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
10. Свойства положительной а.ф.м..
11. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда). Пространства с мерой .
12. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
13. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
14. Непрерывность конечной положительной меры.
15. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
16. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
17. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
18. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
19. Лебеговский метод продолжения меры.
20. Теорема Хана о продолжении.
21. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
22. Мера Бореля.
23. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
24. Свойства функции ограниченной вариации
25. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
26. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
27. Критерий функции ограниченной вариации.
28. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
29. Определение функции скачков и их свойства.
30. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
31. Свойства производной неопределенной полной вариации.
32. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
33. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
34. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
35. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
36. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.

### **Вопросы к экзамену по дисциплине**

1. Основные системы множеств. Минимальные классы множеств, содержащие данную систему множеству.
2. Структуры и свойства минимальных классов, порожденных полукольцом.
3. Произведение систем множеств. Кольцо,  $\sigma$  - кольцо в произведении множеств.
4. Нижний и верхний пределы последовательности множеств. Предел последовательности множеств и его свойства.



5. Борелевская  $\sigma$  – алгебра множеств.
6. Определения конечно аддитивной функции множества и ее полной вариации.
7. Свойства аддитивной функции множества.
8. Свойства полной вариации а.ф.м..
9. Определения верхней (= положительной) и нижней (= отрицательной) вариации аддитивной функции множества (а.ф.м.). Теорема Жордана о разложении ограниченной а.ф.м..
10. Введение понятия нуль-множества и его использование в анализе.
11. Свойства положительной а.ф.м..
12. Определение счетно-аддитивной функции множества (=меры = заряда).  
Пространства с мерой .
13. Свойства  $\sigma$ - а.ф.м..
14. Свойства полной вариации, верхней и нижней вариации для конечной меры.
15. Непрерывность конечной положительной меры.
16. Теорема Хана о разложении вещественной меры.
17. Понятия абсолютной непрерывности, сингулярности а.ф.м. относительно другой а.ф.м. и соответствующие утверждения.
18. Теорема Лебега о разложении  $\sigma$ - а.ф.м..
19. Определение внешней меры и теорема Каратеодори.
20. Лебеговский метод продолжения меры.
21. Теорема Хана о продолжении.
22. Теорема Александрова о продолжении регулярной меры.
23. Мера Бореля.
24. Определение функции ограниченной вариации и простейшие свойства полной вариации.
25. Свойства функции ограниченной вариации
26. Неопределенная полная вариация функции и ее свойства.
27. Критерий непрерывности и односторонней непрерывности неопределенной полной вариации.
28. Критерий функции ограниченной вариации.
29. Неопределенные положительная и отрицательная вариации и их свойства.
30. Определение функции скачков и их свойства.
31. Дифференциальные свойства функции ограниченной вариации.
32. Свойства производной неопределенной полной вариации.
33. Абсолютно непрерывные функции и их полные вариации.
34. Критерий абсолютной непрерывности функции (= теорема Лебега).
35. Разложение функции ограниченной вариации на сумму трех компонент.
36. Полнота пространства функций ограниченной вариации.
37. Сходимость в пространстве функций ограниченной вариации.
38. Условия сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
39. Условия поточечной сходимости последовательности функций ограниченной вариации к функции ограниченной вариации.
40. Принцип выбора Э.Хелли.
41. Меры Бореля-Стилтьеса и Лебега- Стилтьеса.
42. Характеристика борелевских мер.

#### **7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля - 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях - 20 баллов,
- коллоквиум – 30 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ - 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос (экзамен) - 100 баллов.

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

##### ***Основная литература:***

- 1) Колмогоров А., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1976.
- 2) Рудин У. Основы математического анализа. изд 2.-М.:Мир, 1976.  
- М.: Наука 1965.
- 3) Кириллов А.А.Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.:Наука, 1979.
- 4) Федоров В.М. Теория функций и функционального анализа ч.1, - М.: изд. МГУ, 2000.
- 5) Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. – М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2009. – 724с.
- 6) Магомедов Г.А., Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Основы теории меры*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 1997.
- 7) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильбеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.
- 8) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.
- 9) Богачев В.И. Основы теории меры. Том 1. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 544стр.

##### ***Дополнительная литература:***

- 1) Данфорд Н., Шварц Дж.. Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИЛ , 1962.
- 2) Халмош П. Теория меры. – М.: ИЛ, 1953.
- 3) Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н. и др. Действительный анализ в задачах. М.: ФИЗМАТЛИТ 2005 416 стр.

4) Богачев В.И. Основы теории меры. Том 2. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 544стр.

### **Задачники:**

1) Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

2) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.

3) Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. М., 2005.

4) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева «Задачи и упражнения по функциональному анализу» Наука 2002

## **9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.**

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам). Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	<p><b>Студентам:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать в списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий и решить свою задачу по аналогии;</li> </ul> <p><b>Преподавателям:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- использовать математические пакеты для поддержки курса лекций.</li> </ul> <p><b>Всем заинтересованным пользователям:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе.</li> <li>2. – найти демо-версии популярных математических пакетов, электронные книги и свободно распространяемые программы.</li> </ol>
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru, http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

## 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Дисциплина «Теория меры и интеграла» является вариативной частью, изучаемых будущими магистрами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

- 1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
- 2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
- 3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
- 4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
- 5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
- 6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а именно:

- а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
- б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;
- в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.

Учебная программа дисциплине *теория меры и интеграла* распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

### Методические рекомендации

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

- 1) Колмогоров А., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1976.
- 2) Рудин У. Основы математического анализа. изд 2.-М.:Мир, 1976.  
- М.: Наука 1965.
- 3) Кириллов А.А. Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.:Наука, 1979.
- 4) Федоров В.М. Теория функций и функционального анализа ч.1, - М.: изд. МГУ, 2000.
- 5) Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. – М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2009. – 724с.
- 6) Магомедов Г.А., Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Основы теории меры*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 1997.
- 7) Рагимханов Р.К., Сиражудинов М.М. *Функции с ограниченной вариацией. Интеграл Стильтьеса и его приложения*. Мах-ла: ИПЦ ДГУ, 2008.
- 8) Рагимханов Р.К., Рамазанов А.-Р.К., Рагимханов В.Р. Аддитивные функции множества и смежные вопросы. Учебное пособие - Махачкала: Изд. ДГУ, 2012.
- 9) Богачев В.И. Основы теории меры. Том 1. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003, 544стр.
- 10) Дерр В. Я. Функциональный анализ: лекции и упражнения. – М.: КНОРУС, 2013. – 464 с.

Решать задачи и упражнения из учебных пособий

- 1) Дерр В. Я. «Функциональный анализ: лекции и упражнения». – М.: КНОРУС, 2013. – 464 с.
- 2) Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.
- 3) Ульянов П.Л., Бахвалов А.Н., Дьяченко М.И., Казарян К.С., Сифуэнтес П. Действительный анализ в задачах. М., 2005.
- 4) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева «Задачи и упражнения по функциональному анализу» Наука 2002

Для проверки остаточных знаний использовать тесты и вопросы для самопроверки

Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы, решить самостоятельно задачи и примеры из учебного пособия: Дерр В. Я. Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. – М.: Высш. шк., 2008. – 384 с.

**11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по предмету рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

## **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами.

В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.