

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Факультет математики и компьютерных наук

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**«Усреднение дифференциальных операторов»**

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа:  
01.04.01 Математика

Профиль подготовки:  
«Дифференциальные уравнения»

Уровень высшего образования:  
магистратура

Форма обучения:  
Очная

Статус дисциплины:  
вариативная

Математика 2017


Рабочая программа дисциплины: **Усреднение дифф. операторов**  
составлена 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по  
направлению подготовки

01.04.01 уровень подготовки: магистратура


Приказ Минобрнауки России от 12. 03 2015 №228

разработчик: д.ф.-м.н. профессор кафедры  
дифференциальных уравнений и функционального анализа  
Сиражуудинов Магомед Магомедалиевич

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании  
кафедры: дифференциальных уравнений и функционального  
анализа от "22" марта 2017 г. протокол № 6

Заведующий кафедрой  Сиражуудинов М.М.

на заседании Методического совета факультета  
Математики и компьютерных наук от 24 марта 2017 г.

Председатель 

Рабочая программа согласована с  
учебно-методическим  
управлением 30.03.2017



## Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Усреднение дифференциальных операторов» входит в вариативную часть образовательной программы магистратура по направлению 01.04.01.68 М а т е м а т и к а

Дисциплина реализуется на *факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальные уравнения и функциональный анализ.*

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с поведением решений уравнений в частных производных с быстро осциллирующими периодическими коэффициентами, зависящими от малого параметра, когда параметр стремится к нулю. Такие уравнения возникают, например, при изучении физических процессов в сильно неоднородных средах.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

*общекультурных – ОК-1,*

*общепрофессиональных – ОПК-2,*

*профессиональных – ПК-1, ПК-6, ПК-12.*

В результате освоения данной дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов;

**Уметь:** применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики.

**Владеть:** основными методами усреднения.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости в форме: *контрольной работы и коллоквиума, промежуточный контроль в форме экзамена.*

Объем дисциплины 4 зачетных единиц, в том числе в академических часах по видам учебных занятий

Семестр	Учебные занятия						Форма промежуточной аттестации	
	Всего	в том числе						
		Контактная работа обучающихся с преподавателем						СРС, в том числе экзамен
		из них						
Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	КСР	консультации				
10	144	6		14	2		86+36=122	Экзамен

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Усреднение дифференциальных операторов» являются: расширение представления о сходимости дифференциальных операторов; применение усреднения в уравнениях математической физики.

### 2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры

Дисциплина «Усреднение дифференциальных операторов» входит в вариативную часть образовательной программы магистратуры, по направлению 01.04.01 М а т е м а т и к а .

Для освоения дисциплины обучающийся должен владеть математическим анализом, комплексным анализом, уравнениями в частных производных в объеме программ, утвержденных для бакалавров.

**3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).**

<b>Компетенции</b>	<b>Формулировка компетенции из ФГОС ВО</b>	<b>Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)</b>
ОК-1	Способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу	Знать фундаментальные теоремы об усреднении в различных формах. Уметь применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики. Владеть приемами априорных оценок и другими методами усреднения.
ОПК-2	Способность создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов; <b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики. <b>Владеть:</b> основными методами усреднения.
ПК-1	Способность к интенсивной научно-исследовательской работе	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов; <b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики. <b>Владеть:</b> основными методами усреднения.
ПК-6	Способность к собственному видению прикладного аспекта в строгих математических формулировках	Знать: естественнонаучные задачи, приводящие к основным понятиям теории усреднения; приложения основных положений теории усреднения в других разделах математики и естественных науках. Уметь: давать естественнонаучную интерпретацию основных положений теории усреднения. Владеть методами моделирования естественнонаучных задач в форме усреднения дифференциальных операторов.
ПК-12	Способность к проведению методических и экспертных работ в области математики	Знать на достаточно высоком уровне курс теории усреднения по программе данной образовательной организации. Уметь: оценивать объем материала,

		необходимого для освоения того или иного программного вопроса; устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики. Владеть методикой изложения основного материала того или иного раздела теории усреднения.
--	--	---

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет зачетных единиц 4, академических часов 144.

#### 4.2. Структура дисциплины.

Названия разделов и тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Аудиторные занятия, в том числе				Самостоят. работа	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практ. занятия	лабор. работы	Контр. сам. раб.		
<b>Модуль 1. Усреднение обыкновенных дифференциальных уравнений</b>								
1. Среднее значение периодической, почти - периодической функции. Пространства Безиковича, Бора.	А			2			14	коллоквиум
2. Усреднение обыкновенных дифференциальных уравнений	А		2	4			14	Контрольная работа
<b>Всего по модулю 1</b>	<b>36</b>		<b>2</b>	<b>6</b>			<b>28</b>	
<b>Модуль 2. Усреднение эллиптических операторов второго порядка</b>								
1. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка	А		2	4		2	28	коллоквиум
<b>Всего по модулю 2</b>	<b>36</b>		<b>2</b>	<b>4</b>		<b>2</b>	<b>28</b>	
<b>Модуль 3. Усреднение обобщенных уравнений Бельтрами</b>								
1. Усреднение обобщенных уравнений Бельтрами	А		2	4			30	Контрольная работа
<b>Всего по модулю 3</b>	<b>36</b>		<b>2</b>	<b>4</b>			<b>30</b>	
<b>Модуль 4. Промежуточная аттестация</b>								
Экзамен							<b>36</b>	
<b>ИТОГО за семестр А</b>	<b>144</b>		<b>6</b>	<b>14</b>		<b>2</b>	<b>122</b>	

#### 4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам)

## ЛЕКЦИИ

### Модуль 1. Усреднение обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими и почти периодическими коэффициентами

#### **Раздел 1. Среднее значение периодических, почти-периодических функций. Пространства Безиковича, Бора**

*Тема 1. Понятие среднего значения. Основное свойство среднего значения периодических функций.*

Понятие среднего значения функции. Среднее значение периодической функции. О слабой сходимости к среднему значению семейства периодических функций.

*Тема 2. Тригонометрические полиномы. Почти-периодические функции Бора.* Понятие тригонометрического полинома. Запись тригонометрического полинома в комплексной форме. Почти периодические функции Бора.

*Тема 3. Почти - периодические функции Безиковича.*

О непрерывности среднего значения тригонометрических полиномов.

Норма Безиковича. Пополнение тригонометрических полиномов по метрике, порожденной нормой Безиковича. Пространство Безиковича.

#### **Раздел II. Усреднение обыкновенных дифференциальных уравнений**

*Тема 1. Усреднение уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом.*

Понятие слабой сходимости. Понятие усреднения семейства обыкновенных уравнений второго порядка.

*Тема 2. Усреднение уравнения второго порядка с почти-периодическим коэффициентом.*

Определение усреднения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с почти периодическими по Бору коэффициентами.

Теорема об усреднении.

### Модуль 2. Усреднение недивергентных операторов второго порядка с периодическими и почти периодическими коэффициентами

#### **Раздел 3. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка**

*Тема 1. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка с периодическими коэффициентами.*

Семейство недивергентных эллиптических операторов второго порядка с периодическими коэффициентами. Поведение решений этого семейства.

Понятие усреднения семейства. Теорема об усреднении.

*Тема 2. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка с почти периодическими коэффициентами*

Поведение решений семейства недивергентных эллиптических операторов второго порядка с почти периодическими по Бору коэффициентами. Понятие усреднения. Теорема об усреднении.

#### **Раздел 4. Усреднение уравнения Бельтрами**

*Тема 1. Усреднение уравнения Бельтрами с периодическим коэффициентом.*

Понятие усреднения. Теорема об усреднении.

*Тема 1. Усреднение уравнения Бельтрами с почти-периодическим коэффициентом.*

Понятие усреднения. Теорема об усреднении. Примеры.

### Практические занятия

*Тема 1. Понятие среднего значения. Основное свойство среднего значения периодических функций.*

*Среднее значение функций.* Найти средние значения периодических функций:  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$ ,  $\sin^3 x$ ,  $\cos^3 x$ ,  $\sin^4 x$ ,  $\cos^4 x$  и их различных линейных комбинаций.

Если  $f(x)$  периодическая функция, то  $f(\varepsilon^{-1}x)$  слабо сходится к среднему значению  $f(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $L_2$ . Найти слабые пределы семейств:  $\sin \varepsilon^{-1}x$ ,  $\cos \varepsilon^{-1}x$ ,  $\sin^2 \varepsilon^{-1}x$ ,  $\cos^2 \varepsilon^{-1}x$ ,  $\sin^3 \varepsilon^{-1}x$ ,  $\cos^3 \varepsilon^{-1}x$ ,  $\sin^4 \varepsilon^{-1}x$ ,  $\cos^4 \varepsilon^{-1}x$

*Тема 2. Тригонометрические полиномы. Почти-периодические функции Бора*

*Тригонометрические полиномы в комплексной форме.* Представить функции  $\sin x, \cos x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin^3 x, \cos^3 x, \sin^4 x, \cos^4 x$  в виде тригонометрических полиномов в комплексной форме.

*Почти периодические по Бору функции.* Показать, что функции:  $\sin x + \sin \sqrt{2}x, \cos x + \cos \sqrt{2}x$  и подобные им непериодические, а почти периодические по Бору.

*Тема 3. Почти - периодические функции Безиковича.*

*Норма Безиковича.* Найти нормы Безиковича для тригонометрических функций, тригонометрических полиномов: 1)  $\sin x$ ; 2)  $\cos x$ ; 3)  $\sin^2 x$ ; 4)  $\cos^2 x$ ; 5)  $\sin^3 x$ ; 6)  $\cos^3 x$ ; 7)  $\sin^4 x$ ; 8)  $\cos^4 x$ ; 9)  $e^{inx}$ ,  $n$  – целое, и их линейных комбинаций.

*Тема 4. Усреднение уравнения второго порядка с периодическим коэффициентом.*

Найти усредненные уравнения для уравнений:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $(2 + \sin \varepsilon^{-1}x) u''_{\varepsilon} = f;$      | 5) $(2 + \cos \varepsilon^{-1}x) u''_{\varepsilon} = f;$      |
| 2) $(2 - \sin \varepsilon^{-1}x) u''_{\varepsilon} = f;$      | 6) $(2 - \cos \varepsilon^{-1}x) u''_{\varepsilon} = f;$      |
| 3) $(2 + \sin \varepsilon^{-1}x)^{-1} u''_{\varepsilon} = f;$ | 7) $(2 + \cos \varepsilon^{-1}x)^{-1} u''_{\varepsilon} = f;$ |
| 4) $(2 - \sin \varepsilon^{-1}x)^{-1} u''_{\varepsilon} = f;$ | 8) $(2 - \cos \varepsilon^{-1}x)^{-1} u''_{\varepsilon} = f.$ |

*Тема 5. Усреднение уравнения второго порядка с почти-периодическим коэффициентом.*

Найти усредненное уравнение для уравнения  $a(\varepsilon^{-1}x) u''_{\varepsilon} = f$ , если

- |  |  |
|--|--|
| 1) $a(x) = 3 + \sin x + \sin \sqrt{2}x;$ | 5) $a(x) = 3 + \cos x + \cos \sqrt{2}x;$ |
| 2) $a(x) = 3 - \sin x + \sin \sqrt{2}x;$ | 6) $a(x) = 3 - \cos x + \cos \sqrt{2}x;$ |
| 3) $a(x) = 3 - \sin x - \sin \sqrt{2}x;$ | 7) $a(x) = 3 - \cos x - \cos \sqrt{2}x;$ |
| 4) $a(x) = 3 + \sin x + \sin \sqrt{2}x;$ | 8) $a(x) = 3 + \cos x - \cos \sqrt{2}x.$ |

*Тема 6. Усреднение не дивергентных эллиптических операторов второго порядка с периодическими коэффициентами.*

Найти усредненные уравнения для уравнений второго порядка, коэффициенты которых зависят только от одной переменной:

- 1)  $(2 + \sin \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_1^2} + (2 + \cos \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_2^2} = f,$
- 2)  $(2 - \sin \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_1^2} + (2 - \cos \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_2^2} = f,$
- 3)  $(2 - \cos \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_1^2} + (2 - \cos \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_2^2} = f,$
- 4)  $(2 + \cos \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_1^2} + (2 + \cos \varepsilon^{-1}x_1) \frac{\partial^2 u_{\varepsilon}}{\partial x_2^2} = f,$

*Тема 7. Усреднение уравнения Бельтрами с периодическим коэффициентом.*

Усреднить уравнение Бельтрами  $\partial_{\bar{z}}u + \mu(\varepsilon^{-1}x_1)\partial_z u = f$  с периодическим коэффициентом, зависящим только от одной переменной если:

- 1)  $\mu(x_1) = 2^{-1} \sin x_1;$
- 2)  $\mu(x_1) = 2^{-1} \cos x_1;$
- 3)  $\mu(x_1) = 2^{-1} \sin 2x_1;$
- 4)  $\mu(x_1) = 2^{-1} \cos 2x_1;$
- 5)  $\mu(x_2) = 2^{-1} \sin x_2;$
- 6)  $\mu(x_2) = 2^{-1} \cos x_2;$
- 7)  $\mu(x_2) = 2^{-1} \sin 2x_2;$
- 8)  $\mu(x_2) = 2^{-1} \cos 2x_2.$

*Тема 8. Усреднение уравнения Бельтрами с почти периодическим коэффициентом.*

Усреднить уравнение Бельтрами  $\partial_{\bar{z}}u + \mu(\varepsilon^{-1}x)\partial_z u = f$  с почти периодическим коэффициентом, зависящим только от одной переменной, если:

- 1)  $\mu(x_1) = 4^{-1}(\sin x_1 + \sin\sqrt{2}x_1)$ ;
- 2)  $\mu(x_1) = 4^{-1}(\cos x_1 + \cos\sqrt{2}x_1)$ ;
- 3)  $\mu(x_1) = 4^{-1}(\sin x_1 - \sin\sqrt{2}x_1)$ ;
- 4)  $\mu(x_1) = 4^{-1}(\cos x_1 - \cos\sqrt{2}x_1)$ ;
- 5)  $\mu(x_2) = 4^{-1}(\sin x_2 + \sin\sqrt{2}x_2)$ ;
- 6)  $\mu(x_2) = 4^{-1}(\cos x_2 + \cos\sqrt{2}x_2)$ ;
- 7)  $\mu(x_2) = 4^{-1}(\sin x_2 - \sin\sqrt{2}x_2)$ ;
- 8)  $\mu(x_2) = 4^{-1}(\cos x_2 - \cos\sqrt{2}x_2)$ .

## **5. Образовательные технологии**

В основе преподавания курса «Усреднение дифференциальных операторов» лежит лекционно-семинарская система обучения, что связано с необходимостью активного продумывания теоретического материала, содержащего глубокие и абстрактные понятия. Индивидуальные особенности обучающихся учитываются подбором заданий разного уровня сложности для самостоятельной работы студентов.

По данной дисциплине учебным планом предусмотрено также проведение занятий в интерактивных формах. Лекции проводятся в аудиториях, оснащенных видеопроекторами. В университете функционирует Центр современных образовательных технологий, в котором предусматриваются мастер-классы специалистов.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.**

1. Жиков В.В, Козлов С.Н., Оленик О.А. «Усреднение дифференциальных операторов» М: Наука, 1993г.
2. Р.С. Гутер, Л.Д. Кудрявцев, М.Б. Левитан «Элементы теории функций» М: Физматгиз 1963г.
3. Левитан М.Б, Жиков В.В. «Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения», М: МГУ, 1978г.
4. Сиражудинов М.М. «О G-сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами». Матем. сборн. Т.199, №5. С.124-155. 2008 г.
5. Левитан М.Б. «Почти-периодические функции» М: ГИТЛ., 1963г.

### **Примерные вопросы к экзамену**

1. Среднее значение периодических функций и его основное свойство
2. Тригонометрические многочлены
3. Почти - периодические функции Бора
4. Почти - периодические функции Безиковича
5. Среднее значение почти - периодических функций Бора
6. Среднее значение почти - периодических функций Безиковича
7. Понятие усреднения обыкновенных уравнений
8. Усреднение недивергентных эллиптических операторов
9. Усреднение уравнения Бельтрами

<b>Разделы и темы для</b>	<b>Виды и содержание самостоятельной работы</b>
---------------------------	---



самостоятельного изучения	
<b>Раздел 1.</b>	
1. Среднее значение периодических функций и его основное свойство	Доклад
2. Почти - периодические функции Бора	Решение задач и упражнений.
3. Почти - периодические функции Безиковича	Доклад
<b>Раздел 2 Линейно нормированные и гильбертовы пространства</b>	
1. Среднее значение почти - периодических функций Безиковича	Решение задач и упражнений.
2. Среднее значение почти - периодических функций Безиковича	Решение задач и упражнений.
Понятие усреднения обыкновенных уравнений	Доклад
<b>Раздел 3.</b>	
1. Понятие усреднения недивергентных эллиптических операторов	Решение задач и упражнений.
2. Понятие усреднения уравнения Бельтрами	Решение задач и упражнений.

## 7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

### 7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Перечень компетенций с указанием этапов их формирования приведен в описании образовательной программы.

Компетенции	Знания, умения, навыки	Процедура оценивания
ОК-1	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов; <b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики. <b>Владеть:</b> основными методами усреднения.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ОКП-2	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов; <b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики. <b>Владеть:</b> основными методами усреднения.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-1	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов; <b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики. <b>Владеть:</b> основными методами усреднения.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен
ПК-6	Знать: естественнонаучные задачи, приводящие к основным понятиям теории усреднения; приложения основных положений теории усреднения в других разделах математики и естественных науках. Уметь: давать естественнонаучную интерпретацию основных положений теории усреднения.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен

	Владеть методами моделирования естественнонаучных задач в форме усреднения дифференциальных операторов.	
ПК-12	Знать на достаточно высоком уровне теорию усреднения дифференциальных операторов по программе данной образовательной организации. Уметь: оценивать объем материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса; устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики усреднения. Владеть методикой изложения основного материала.	Коллоквиум, контрольная работа, экзамен

## 7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

ОК-1. Схема оценки уровня формирования компетенции «Обладать способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов;	Допускает неточности в определениях и формулировках основных теорем.	Демонстрирует знание определений фундаментальных понятий, формулирует и доказывает с небольшими неточностями основные теоремы усреднения дифференциальных операторов.	Показывает знание строгих определений фундаментальных понятий, формулировок и доказательств основных теорем усреднения дифференциальных операторов.
Базовый	<b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики.	Решает несложные задачи усреднения	Умеет применять методы усреднения к основным эллиптическим уравнениям.	Умеет применять приемы и методы усреднения к основным эллиптическим уравнениям.
Продвинутый	<b>Владеть:</b> основными методами усреднения.	Слабо владеет основными методами усреднения	Владеет основными методами усреднения.	Владеет приемами и методами усреднения.

ОПК-2. Схема оценки уровня формирования компетенции «Обладать способностью создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично

Пороговый	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов	Допускает неточности в постановках краевых задач из теории дифференциальных операторов	Демонстрирует знание основных понятий и методов усреднения дифференциальных операторов.	Показывает четкие знания методов усреднения дифференциальных операторов
Базовый	<b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики.	Слабо применяет методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики	Умеет применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики	Умеет применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики
Продвинутый	<b>Владеть:</b> основными методами усреднения	С недочетами владеет стандартными методами усреднения	Владеет стандартными методами усреднения	Владеет основными методами усреднения

#### ПК-2. Способность к интенсивной исследовательской работе

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	<b>Знать:</b> основные понятия и методы усреднения дифференциальных операторов	С неточностями владеет стандартными методами усреднения	Демонстрирует знание основных теорем усреднения дифференциальных операторов	Показывает четкое знание утверждений из теории усреднения дифференциальных операторов
Базовый	<b>Уметь:</b> применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики.	Слабо применяет методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики	Умеет применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики	Умеет применять методы усреднения к конкретным уравнениям математической физики
Продвинутый	<b>Владеть:</b> основными методами усреднения	С недочетами владеет стандартными методами усреднения	Владеет стандартными методами усреднения	Владеет основными методами усреднения

#### ПК-6

Схема оценки уровня формирования компетенции «Обладать способностью к собственному видению прикладного аспекта в строгих математических формулировках»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично

Пороговый	Знать: естественнонаучные задачи, приводящие к основным понятиям теории усреднения; приложения основных положений теории усреднения в других разделах математики и естественных науках.	Знает: некоторые естественнонаучные задачи, приводящие к понятиям теории усреднения; приложения теории усреднения в других разделах математики и естественных наук. Допускает ошибки в естественнонаучных интерпретациях положений теории усреднения.	Знает: естественнонаучные задачи, приводящие к основным понятиям теории усреднения; приложения теории усреднения в других разделах математики и естественных наук.	Знает: естественнонаучные задачи, приводящие к основным понятиям теории усреднения; приложения основных положений теории усреднения в других разделах математики и естественных наук.
Базовый	Уметь: давать естественнонаучную интерпретацию основных положений теории усреднения.	Допускает ошибки в естественнонаучных интерпретациях положений теории усреднения.	Допускает неточности в естественнонаучных интерпретациях положений теории усреднения.	Умеет: давать естественнонаучную интерпретацию основных положений теории усреднения.
Продвинутый	Владеть методами моделирования естественнонаучных задач в форме усреднения дифференциальных операторов.	Слабо владеет методами моделирования естественнонаучных задач в форме усреднения дифференциальных операторов	Владеет определенными методами моделирования естественнонаучных задач в форме усреднения дифференциальных операторов.	Владеет методами моделирования естественнонаучных задач в форме усреднения дифференциальных операторов.

## ПК-12

Схема оценки уровня формирования компетенции «Обладать способностью к проведению методических и экспертных работ в области математики»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
Пороговый	Знать на достаточно высоком уровне теорию усреднения дифференциальных операторов по программе данной образовательной организации.	Слабо знает курс усреднения дифференциальных операторов по программе данной образовательной организации.	Знает на достаточно хорошем уровне курс усреднения дифференциальных операторов по программе данной образовательной организации.	Знает на высоком уровне курс усреднения дифференциальных операторов по программе данной образовательной организации.

Базовый	Уметь: оценивать объем материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса; устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики теории усреднения.	Допускает ошибки в оценке объема материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса; в связях между различными предметными разделами с учетом специфики теории усреднения.	Умеет: оценивать объем материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса; устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики теории усреднения.	Умеет: оценивать объем материала, необходимого для освоения того или иного программного вопроса; устанавливать связи между различными предметными разделами с учетом специфики теории усреднения.
Продвинутый	Владеть методикой изложения основного материала того или другого раздела усреднения.	Слабо владеет методикой изложения основного материала того или другого раздела теории усреднения.	Владеет в определенной степени методикой изложения основного материала того или другого раздела теории усреднения.	Владеет методикой изложения основного материала того или другого раздела теории усреднения.

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительная оценки по дисциплине быть не может.

### 7.3. Типовые контрольные задания

#### 7.3.1. Примерные контрольные вопросы к коллоквиумам и экзамену

1. Среднее значение
2. Среднее значение периодических функций
3. Слабая сходимость в гильбертовом пространстве
4. Основное свойство среднего значения
5. Различные типы сходимости
6. Понятие усреднения и формулы
7. Усреднение обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами и формулы усреднения
7. Усреднение обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами и формулы усреднения
8. Усреднение обыкновенных уравнений с почти - периодическими коэффициентами и формулы усреднения
9. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка с периодическими коэффициентами и формулы усреднения
10. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка с почти - периодическими коэффициентами и формулы усреднения
11. Усреднение уравнения Бельтрами с периодическим коэффициентом и формулы усреднения

12. Усреднение уравнения Бельтрами с почти- периодическим коэффициентом и формулы усреднения

### **7.3.2. Примерные темы докладов и рефератов**

1. Основное свойство среднего значения периодических функций многих переменных
2. Примеры усреднения обыкновенных дифференциальных уравнений
3. Примеры усреднения недивергентных эллиптических операторов второго порядка
4. Недивергентные эллиптические операторы
5. Задача Римана-Гильберта для уравнения Бельтрами
6. Примеры усреднения уравнений Бельтрами

### **7.3.1. Вопросы для контроля самостоятельной работы студентов**

1. Среднее значение периодических функций
2. Среднее значение почти периодических функций
3. Слабая сходимости в гильбертовом пространстве
4. Основное свойство среднего значения
5. Различные типы сходимости
6. Усреднение обыкновенных уравнений с периодическими коэффициентами и формулы усреднения
7. Усреднение обыкновенных уравнений с почти периодическими коэффициентами и формулы усреднения
8. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка с периодическими коэффициентами и формулы усреднения
9. Усреднение недивергентных эллиптических операторов второго порядка с почти периодическими коэффициентами и формулы усреднения
10. Усреднение уравнения Бельтрами с периодическим коэффициентом и формулы усреднения
11. Усреднение уравнения Бельтрами с почти периодическим коэффициентом и формулы усреднения

### **7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.**

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля - 50% и промежуточного контроля – 50 %.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий - 10 баллов,
- участие на практических занятиях -30 баллов,
- выполнение лабораторных заданий – 30 баллов,
- выполнение домашних (аудиторных) контрольных работ – 30 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос -50 баллов,
- письменная контрольная работа -50 баллов,

### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.**

#### **Основная**

6. Жиков В.В, Козлов С.Н., Оленик О.А. «Усреднение дифференциальных операторов» М.: Наука. 1993 г.
7. Р.С. Гутер, Л.Д. Кудрявцев, М.Б. Левитан «Элементы теории функций» М: Физматгиз 1963г.
8. Левитан М.Б , Жиков В.В. «Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения», М: МГУ, 1978г.

### Дополнительная

9. Сиражудинов М.М. «О G-сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами». Матем. сборн. Т.199, №5. С.124-155.
10. Левитан М.Б. «Почти-периодические функции» М: ГИТЛ., 1963г.

### 9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	www.math.ru	Сайт посвящён математике (и математикам. Этот сайт — для школьников, студентов, учителей и для всех, кто интересуется математикой. Тех, кого интересует зона роста современной науки математика.
2.	Exponenta.ru	www.exponenta.ru	<b>Студентам:</b> - запустить установленный у Вас математический пакет, выбрать списке примеров, решенных в среде этого пакета, подходящий решить свою задачу по аналогии; <b>Преподавателям:</b> - использовать математические пакеты для поддержки курса лекций. <b>Всем заинтересованным пользователям:</b> <b>1.</b> – можно ознакомиться с примерами применения математических пакетов в образовательном процессе. <b>2.</b> – найти демо-версии популярных математических пакетов электронные книги и свободно распространяемые программы.
3.	Математика	www.mathematics.ru	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
4.	Российское образование.	www.edu.ru	федеральный образовательный портал: учреждения, программы, стандарты, ВУЗы, тесты ЕГЭ.
5.	Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ	http://elib.dgu.ru, http://edu.icc.dgu.ru	
6.	Общероссийский математический портал (Math-Net.Ru)	www.mathnet.ru	Портал, предоставляет различные возможности в поиске информации о математической жизни в России Портал содержит разделы: журналы, видеотека, библиотека, персоналии, организации, конференции.

### 10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Учебная программа по курсу «Усреднение дифференциальных операторов» распределена по темам и по часам на лекции, практические и лабораторные занятия; предусмотрена также самостоятельная учебная работа студентов. По каждой теме преподаватель указывает студентам необходимую литературу (учебники, учебные пособия, сборники задач и упражнений), а также соответствующие темам параграфы и номера упражнений и задач.

Самостоятельная работа студентов складывается из работы над лекциями, с учебниками, решения рекомендуемых задач, подготовки к защите лабораторных работ, а также из подготовки к контрольным работам, коллоквиумам и сдаче зачетов и экзаменов.

При работе с лекциями и учебниками особое внимание следует уделить изучению основных понятий и определений по данному разделу, а также особенностям примененных методов и технологий доказательства теорем. Решение достаточного количества задач по данной теме поможет творческому овладению методами доказательства математических утверждений.

После изучения каждой темы рекомендуется самостоятельно воспроизвести основные определения, формулировки и доказательства теорем. Для самопроверки рекомендуется также использовать контрольные вопросы, приводимые в учебниках после каждой темы.

Основная цель практических занятий – подготовка студентов к самостоятельной работе над теоретическим материалом и к решению задач и упражнений.

Дисциплина «Усреднение дифференциальных операторов» является основной базой всех специальных дисциплин, изучаемых будущими бакалаврами. Специфика дисциплины состоит в том, что рассмотрение теоретических вопросов здесь тесно связано с решением практических задач.

На лекциях особенно большое значение имеет реализация следующих задач:

- 1) глубокое осмысливание ряда понятий и положений, введенных в теоретическом курсе;
- 2) раскрытие прикладного значения теоретических сведений;
- 3) развитие творческого подхода к решению практических и некоторых теоретических вопросов;
- 4) закрепление полученных знаний путем многократного практического использования;
- 5) приобретение прочных навыков типовых расчетов;
- 6) расширение кругозора, приобретение полезных сведений, касающихся технических данных реальных объектов и конкретных условий их эксплуатации.

Наряду с перечисленными выше образовательными целями, занятия преследуют и важные цели воспитательного характера, а именно:

- а) воспитание настойчивости в достижении конечной цели;
- б) воспитание дисциплины ума, аккуратности, добросовестного отношения к работе;
- в) воспитание критического отношения к своей деятельности, умения анализировать свою работу, искать оптимальный путь решения, находить свои ошибки и устранять их.

### **Методические рекомендации**

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить следующие литературные источники:

1. Жиков В.В, Козлов С.Н., Оленик О.А. «Усреднение дифференциальных операторов» М.: Наука. 1993 г.
2. Р.С. Гутер, Л.Д. Кудрявцев, М.Б. Левитан «Элементы теории функций» М: Физматгиз 1963г.
3. Левитан М.Б, Жиков В.В. «Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения», М: МГУ, 1978г.
4. Сиражудинов М.М. «О G-сходимости и усреднении обобщенных операторов Бельтрами». Матем. сборн. Т.199, №5. С.124-155.
5. Левитан М.Б. «Почти-периодические функции» М: ГИТЛ., 1963г.

Для подготовки к экзамену: повторить лекционный материал, проанализировать список рекомендованной литературы.

### **11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.**

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине рекомендуются компьютерные технологии, основанные на операционных системах Windows, Ubuntu, Linux, прикладные программы Mathcad, Matlab, Mathematica, а также сайты образовательных учреждений и журналов, информационно-справочные системы, электронные учебники.

При проведении занятий рекомендуется использовать компьютеры, мультимедийные проекторы, интерактивные экраны.

### **12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.**

Университет обладает достаточной базой аудиторий для проведения всех видов занятий, предусмотренных образовательной программой дисциплины математический анализ. Кроме того, на



факультете 4 компьютерных класса и 4 учебных класса, оснащенных компьютерами с соответствующим программным обеспечением и мультимедиа-проекторами. В университете имеется необходимый комплект лицензионного программного обеспечения.