

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Факультет математики и компьютерных наук

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Обобщенные функции

Кафедра дифференциальных уравнений и функционального анализа факультета математики и компьютерных наук

Образовательная программа

01.03.01 - Математика

Профиль подготовки

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Уровень высшего образования

бакалавриат

Форма обучения

очная

Статус дисциплины: **вариативная**

Махачкала -2017

Рабочая программа дисциплины: Обобщенные функции и их прил.
составлена 2017 году в соответствии с требованиями ФГОС ВО по
направлению подготовки

01.03.01 Математика (уровень подготовки бакалавриат)

Приказ Минобрнауки России № 943

разработчик: кандидат ф.-м.н., доцент кафедры
дифференциальных уравнений и функционального анализа
Меджидов Зияудин Гаджиевич

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании
кафедры: дифференциальных уравнений и функционального
анализа от "22" марта 2017 г. протокол № 6

Заведующий кафедрой



Сиражудинов М.М.

на заседании Методического совета факультета
Математики и компьютерных наук от 24 марта 2017 г.

Председатель



Рабочая программа согласована с
учебно-методическим
управлением 30.03.2017



Содержание

Аннотация рабочей программы дисциплины	4
1. Цели освоения дисциплины.....	5
2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата.....	5
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).....	5
4. Объем, структура и содержание дисциплины.	7
5. Образовательные технологии.....	8
6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.	10
7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины	13
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.....	24
9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.....	24
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.	24
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.	25
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	25

Аннотация рабочей программы дисциплины

Дисциплина «Обобщенные функции» входит в базовую часть образовательной программы бакалавриата по направлению 01.03.01 - Математика.

Дисциплина реализуется на факультете математики и компьютерных наук кафедрой дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Содержание дисциплины охватывает круг вопросов, связанных с метрическими и нормированными пространствами, теорией операторов. Изучаемый материал применяется в задачах математической физики, в теории интегральных уравнений, в общей теории приближенных методов и т.д. Дисциплина «Обобщенные функции» необходимо изучать для овладения общими методами решения операторных уравнений и применения их при решении конкретных задач.

Дисциплина нацелена на формирование следующих компетенций выпускника:

профессиональных – ОПК-1, ПК-1, ПК-2, ПК-4.

Преподавание дисциплины предусматривает проведение следующих видов учебных занятий: *лекции, практические занятия и самостоятельная работа.*

Рабочая программа дисциплины предусматривает проведение следующих видов контроля успеваемости: в форме *контрольных работ и коллоквиумов*, промежуточный контроль в форме *зачета*.

Объем дисциплины 3 зачетные единицы, в том числе в академических часах по видам учебных занятий:

Се- местр	Учебные занятия							Форма промежу- точной ат- тестации (зачет, дифферен- цирован- ный зачет, экзамен)	
	Все го	в том числе							СРС
		Контактная работа обучающихся с преподавателем							
		из них							
Лек- ции	Лабора- торные занятия	Практи- ческие занятия	КСР	кон- сульта- ции					
8	108	32		18			58	Зачет	

1. Цели освоения дисциплины

Освоение дисциплины «Обобщенные функции» преследует следующие цели: расширение представления студентов о понятии функции путем введения обобщенных функций, изучение основных операций над обобщенными функциями, ознакомление с применениями обобщенных функций в дифференциальных уравнениях, уравнениях математической физики, физике, демонстрация эффективности применения обобщенных функций в прикладных задачах.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Обобщенные функции» входит в вариативную часть образовательной программы бакалавриата по направлению 01.03.01 – Математика.

Дисциплина «Обобщенные функции» преподается на 4 курсе бакалавриата факультета математики и компьютерных наук после изучения основных курсов математических дисциплин: математического анализа, алгебры и геометрии, дифференциальных уравнений и УЧП. Знание материала названных дисциплин необходимо для успешного освоения дисциплины «Обобщенные функции». Данная дисциплина позволяет придать математическую строгость различным физическим понятиям и явлениям.

Знания, умения и навыки, полученные в результате освоения данной дисциплины, будут способствовать дальнейшему формированию компетенций при изучении дисциплины «Дополнительные главы уравнений в частных производных»; они окажут неоценимую помощь при написании выпускных квалификационных работ по соответствующей тематике.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (перечень планируемых результатов обучения).

Компетенции	Формулировка компетенции из ФГОС ВО	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенций)
ОПК-1	Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики	Знать: как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций. Уметь: формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат. Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в про-

	и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности	странстве обобщенных функций.
ПК-1	Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области	Знать: основные понятия и методы теории обобщенных функций; Уметь: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями Владеть: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.
ПК-2	Способность математически корректно ставить естественно-научные задачи, знание постановок классических задач математики	Знать: как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций. Уметь: формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат. Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в пространстве обобщенных функций.
ПК-4	Способность публично представлять собственные и известные научные результаты	Знать: условия применимости теории обобщенных функций к конкретной задаче. Уметь: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями. Владеть: основными понятиями и методами теории обобщенных функций.

4. Объем, структура и содержание дисциплины.

4.1. Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 академических часов.

4.2. Структура дисциплины.

№ п/п	Разделы и темы дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации
				Лекции	Практич. занятия	Лаборат. занятия	Контр. сам. раб.	Самост. работа	
Модуль 1. Обобщенные функции и действия над ними									
1	Пространства основных и обобщенных функций	8	1-2	4	2			6	Устный опрос
2	Дифференцирование обобщенных функций	8	3	2	2			6	Тестирование
3	Прямое произведение и свертка обобщенных функций	8	4-5	4	2			6	Контрольная работа
	<i>Итого по модулю 1</i>			10	6			18	<i>Коллоквиум</i>
Модуль 2. Преобразование Фурье обобщенных функций									
1	Обобщенные функции медленного роста	8	6-7	4	2			6	Устный опрос
2	Преобразование Фурье основных функций из пространства Шварца	8	8	2	2			4	Устный опрос
3	Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста	8	9-10	6	4			10	Тестирование
	<i>Итого по модулю 2</i>			12	8			20	<i>Контрольная работа</i>
Модуль 3. Применение обобщенных функций									
1	Применение обоб-	8	11-	6	2			10	Устный оп-

	ценных функций в дифференциальных уравнениях		13						<i>рос</i>
2	Применение обобщенных функций в физике	8	14-15	4	2			10	<i>Тестирование</i>
	<i>Итого по модулю 3</i>			10	4			20	<i>Коллоквиум</i>
	ИТОГО			32	18			58	

4.3. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам).

Модуль 1. Обобщенные функции и действия над ними

Тема 1. Пространство основных функций K .

Пространство K основных функций. Линейные операции и сходимость в K . Разбиение единицы. Умножение основной и бесконечно дифференцируемой функций.

Тема 2. Пространство обобщенных функций K' .

Определение обобщенной функции бесконечного порядка. Линейная замена аргумента. Носитель обобщенной функции. Сходимость. Формулы Сохоцкого. Ряды в пространстве обобщенных функций. Теорема о полноте.

Тема 3. Производная обобщенной функции

Производная обобщенной функции. Корректность определения. Связь между обычной и обобщенной производными. Почленная дифференцируемость рядов обобщенных функций.

Тема 4. Первообразная обобщенных функций

Первообразная. Существование первообразных высокого порядка. Теорема о существовании первообразной обобщенной функции нескольких переменных.

Тема 5. Прямое произведение обобщенных функций

Прямое произведение обычных и обобщенных функций. Корректность определения. Свойства прямого произведения.

Тема 6. Свертка обобщенных функций

Свертка обычных и обобщенных функций. Корректность определения и свойства. Случаи существования свертки обычных и обобщенных функций.

Модуль 2. Преобразование Фурье обобщенных функций

Тема 7. Пространство Шварца основных функций

Пространство S . Плотность в пространстве K . Пространство Шварца функций многих переменных.

Тема 8. Пространство обобщенных функций медленного роста

Обобщенные функции медленного роста. Структура обобщенных функций медленного роста с точечным носителем. Прямое произведение и свертка.

Тема 9. Преобразование Фурье основных функций

Преобразование Фурье функций пространства Шварца и его свойства. Формула обращения.

Тема 10. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста

Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста и его свойства. Формула обращения и двойное преобразование Фурье.

Модуль 3. Применение обобщенных функций

Тема 11. Обыкновенные дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций

Линейные дифференциальные уравнения и системы с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в пространстве обобщенных функций. Понятие обобщенного решения на данном множестве. Метод произвольных постоянных.

Тема 12. Фундаментальные решения дифференциальных операторов

Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. Метод нахождения. Выражение решения неоднородного уравнения через фундаментальное решение. Применение дельта-функции в механике.

Тема 13. Применение обобщенных функций в физике

Задачи типа Коши в механике. Применение обобщенных функций в акустике. Линейные колебания в физике.

5. Образовательные технологии

Лекции проводятся с использованием меловой доски и мела. При проведении отдельных занятий материал может параллельно транслироваться на экран с помощью мультимедийного проектора. Для проведения лекционных занятий необходима аудитория, оснащенная мультимедиа-проектором, экраном, доской, ноутбуком (с программным обеспечением для демонстрации презентаций).

В процессе преподавания дисциплины применяются такие виды лекций, как вводная обзорная лекция, проблемная лекция, лекция визуализация с использованием компьютерной презентационной техники. Для этого на факультете математики и компьютерных наук имеются специальные, оснащенные такой техникой, лекционные аудитории.

По теме «Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста» целесообразно провести мастер-класс с приглашением специалистов по математическому анализу.

При изложении темы «Обыкновенные дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций» предполагается встреча со специалистами по дифференциальным уравнениям из ДГПУ и ДНЦ РАН.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Для успешного освоения отдельных разделов рекомендуется выполнить в письменном виде и сдать преподавателю по одной самостоятельной работе. Ниже приведены примерные варианты самостоятельных работ. При выполнении заданий рекомендуется использовать учебные пособия [1] – [6] из списка рекомендованной литературы (п. 8 настоящей Программы).

6.1. Примерные варианты самостоятельных работ по теме «Пространства основных и обобщенных функций»

СР-1

1. Доказать, что функция $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит основному пространству S .
2. Доказать, что если непрерывная функция f обращается в нуль в области G в смысле обобщенных функций, то $f(x) = 0$ для всех $x \in G$.
3. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную в классическом смысле, то она совпадает с производной в смысле обобщенных функций.
4. Доказать, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x - k)$ сходится в K' при любых $a_k \in \mathbb{R}$.
5. Доказать предельное соотношение (в K') при $t \rightarrow +\infty$: $\frac{e^{ixt}}{x - i0} \rightarrow 2\pi i \delta(x)$.
6. Доказать равенство: $x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$.
7. Пусть $0 \leq a \leq b$. Доказать, что

$$\theta(x - a) * \theta(x - b) = (x - a - b) \theta(x - a - b).$$

СР-2

1. Верно ли, что $e^x \varphi(x) \in S(\mathbb{R})$ для $\forall \varphi \in S$?
2. Доказать равенство $\theta(x) \sin x * \theta(x) \cos x = \frac{1}{2} x_+ \cdot \sin x$.
3. Доказать предельное соотношение (в K') при $t \rightarrow +\infty$: $\frac{e^{-ixt}}{x - i0} \rightarrow 0$.

- Пусть $|a_k| \leq A|k|^m + B$ для некоторого $m > 0$ и $\forall k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда тригонометрический ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ сходится в $K'(R)$.
- Доказать, что функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ сингулярен.
- Доказать равенство $\theta(x) \sin x * \theta(x) \sin x = \frac{1}{2} [\theta(x) \sin x - x_+ \cdot \cos x]$.
- Доказать, что если ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta^{(m)}(x)$ сходится в K' , то все коэффициенты a_m , начиная с некоторого номера, равны нулю.

СР-3

- Доказать предельное соотношение (в K') при $t \rightarrow +\infty$: $\frac{e^{-ixt}}{x + i0} \rightarrow -2\pi i \delta(x)$.
- Доказать, что если $\varphi(x) \in S$, то функции $\varphi^{(n)}(x)$ для любого $n \geq 0$ абсолютно интегрируемы на всей прямой \mathbb{R} .
- Доказать, что если последовательность $\{\varphi_m(x)\}_1^{\infty} \subset K(R)$ сходится в пространстве K к функции φ , то $a \varphi_n \xrightarrow{K} a \varphi$ для любой бесконечно дифференцируемой функции a .
- Доказать, что функция $\frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$ стремится к $\delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.
- Верно ли, что $x^n \varphi(x) \in S(R)$, $n \in N$ для $\forall \varphi \in S$?
- Доказать равенство $\theta(x) \cos x * \theta(x) \cos x = \frac{1}{2} [\theta(x) \sin x + x_+ \cdot \cos x]$.
- Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную в классическом смысле, то она совпадает с производной в смысле обобщенных функций.

СР-4

- Доказать предельное соотношение (в K') при $t \rightarrow +\infty$: $\frac{e^{ixt}}{x + i0} \rightarrow 0$.
- Доказать, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(x - k)$ сходится в K' при любых $a_k \in R$.
- Доказать, что если $f_n(x) = \cos nx$, то $f_n^{(k)} \xrightarrow{K'} 0$, $\forall k \geq 0$.
- Доказать равенство $x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$.
- Пусть $\varphi(x) \in K(R)$, $\varphi(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$. Доказать, что $\frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{K'} \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.
- Пусть $g(x)$ – локально интегрируемая функция, $\alpha_i = const$. Доказать, что равенство $g(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta(x - x_k) = 0$ (в K') имеет место тогда и только тогда, когда $g(x) = 0$ (в K') и $\alpha_k = 0, k = 1, \dots, n$.

7. Показать, что функционал $(y', \varphi) = \int_0^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$ является производной обобщенной функции $y = x_+^{\lambda} = \begin{cases} x^{\lambda} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

СР-5

- Вычислить: а) $\frac{d}{dx} \{x\}$, где $\{x\}$ - дробная часть x ; б) $\frac{d}{dx} [x]$, где $[x]$ - целая часть x ; в) $\frac{d}{dx} \theta(1-|x|)$.
- Доказать предельное соотношение (в K') при $t \rightarrow +\infty$: $\frac{e^{ixt}}{x-i0} \rightarrow 2\pi i \delta(x)$.
- Показать, что функционал $(y', \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} [\varphi(x) - \varphi(0) \theta(1-x)] dx$ является производной обобщенной функции $y = \ln x_+ = \begin{cases} \ln x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$.
- Доказать, что функционалы $\left(P \frac{1}{x}, \varphi \right) = Vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ и $\left(P \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = Vp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$ являются обобщенными функциями. Показать, что $P \frac{1}{x} \cdot x = 1$, $P \frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1$, $\left(P \frac{1}{x} \right)' = - \left(P \frac{1}{x^2} \right)$.
- Доказать, что $\text{supp } f' \subset \text{supp } f$, $f \in K'$.
- Доказать формулу $\theta(x) \cos x * \theta(x) \cos x = \frac{1}{2} [\theta(x) \sin x + x_+ \cdot \cos x]$.
- Доказать, что $\delta^b \xrightarrow{S'} \delta$ при $b \rightarrow +\infty$, где $\delta^b(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{|\xi| < b} e^{ix \cdot \xi} d\xi$,
 $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \dots + x_n \xi_n$.

6.3. Другие виды самостоятельной работы, распределенные по темам, со ссылками на рекомендуемую литературу

Разделы (модули) и темы для самостоятельного изучения	Виды и содержание самостоятельной работы
Модуль 1. Обобщенные функции и действия над ними	
1. Дифференцирование обобщенных функций.	Доклады на темы: 1. Применение обобщенных производных при суммировании расходящихся рядов ([1], [2], [5]). 2. Разбиение единицы и его применение ([1], [2], [5]).

2. Прямое произведение и свертка обобщенных функций.	Доклады на темы: 1. Регуляризация обобщенных функций и ее применение ([3], [5]). 2. Случаи существования свертки обобщенных функций. Сверточная алгебра ([1], [2], [5]).
Модуль 2. Преобразование Фурье обобщенных функций	
1. Обобщенные функции медленного роста.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
2. Преобразование Фурье основных функций из пространства Шварца.	Решение задач и упражнений ([4], [7], [8], [10]).
3. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста	Доклад на тему: Обратное преобразование Фурье обобщенной функции. Формула обращения ([6], [9]).
Модуль 3. Применение обобщенных функций	
1. Фундаментальные решения дифференциальных операторов	Доклад на тему: фундаментальные решения операторов математической физики и их применения
2. Применение обобщенных функций в физике	Доклад на тему: применение обобщенной многоточечной задачи Коши в механике

7. Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

Компетенция	Знания, умения, навыки	Процедура освоения
ОПК-1	Знать: как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций. Уметь: формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат. Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в пространстве обобщенных	Повторение постановок задач и их решения в классическом анализе, сравнение с аналогичными задачами в теории обобщенных функций. Проверка освоения в виде устного опроса и тестирования.

	функций.	
ПК-1	<p>Знать: основные понятия и методы теории обобщенных функций;</p> <p>Уметь: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями</p> <p>Владеть: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.</p>	Изучение тем дисциплины по лекциям, основной литературе [1] – [4], на практических занятиях решать задачи из книг [1], [2], [6]; выступления с докладами; круглый стол на тему «Обобщенная производная и ее применение».
ПК-2	<p>Знать: как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций.</p> <p>Уметь: формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат.</p> <p>Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в пространстве обобщенных функций.</p>	Подготовка рефератов, рекомендованных для самостоятельной работы по освоению модулей; выступление с докладами; тестирование.
ПК-4	<p>Знать: условия применимости теории обобщенных функций к конкретной задаче.</p> <p>Уметь: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями.</p> <p>Владеть: основными понятиями и методами теории обобщенных функций.</p>	Выполнение самостоятельных работ. Устный опрос. Круглый стол на тему «Фундаментальные решения обобщенных функций и их применение».

7.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций, описание шкал оценивания.

ОПК-1 «Готовность использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа, алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в будущей профессиональной деятельности»

Уро-	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П О Р О Г О В Ы Й	<p>Знать: основные понятия и методы теории обобщенных функций.</p> <p>Уметь: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями.</p> <p>Владеть: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.</p>	<p>Знает как выполнять основные операции над обобщенными функциями.</p> <p>Умеет находить обобщенные производные и преобразования Фурье о.ф., фундаментальные решения дифференциальных операторов.</p>	<p>Знает основные понятия и методы обобщенных функций.</p> <p>Умеет находить обобщенные производные и преобразования Фурье о.ф., фундаментальные решения дифференциальных операторов и операторов математической физики.</p>	<p>Знает основные понятия и методы теории обобщенных функций.</p> <p>Умеет применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями.</p>

ПК-1 «Способность к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
П О Р О Г О В Ы Й	<p>Знать: основные понятия и методы теории обобщенных функций.</p> <p>Уметь: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями.</p> <p>Владеть: грамотной математической речью; основными математическими понятиями и методами.</p>	<p>Знает как выполнять основные операции над обобщенными функциями.</p> <p>Умеет находить обобщенные производные и преобразования Фурье о.ф., фундаментальные решения дифференциальных операторов.</p>	<p>Знает основные понятия и методы обобщенных функций.</p> <p>Умеет находить обобщенные производные и преобразования Фурье о.ф., фундаментальные решения дифференциальных операторов и операторов математической физики.</p>	<p>Знает основные понятия и методы теории обобщенных функций.</p> <p>Умеет применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями.</p>

ПК-2

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
п о р о г о в ы й	<p>Знать: как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций.</p> <p>Уметь: формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат.</p> <p>Владеть: методами постановки и решения задач математики и естествознания в пространстве обобщенных функций.</p>	<p>Знает, как выполнять основные операции над обобщенными функциями.</p> <p>Умеет решать задачи, связанные с дифференцируемостью о.ф., преобразованием Фурье.</p>	<p>Знает теоретический материал по основным разделам теории обобщенных функций.</p> <p>Умеет решать задачи, решать задачи, связанные с дифференцируемостью о.ф., преобразованием Фурье, применением о.ф.</p>	<p>Знает, как выполнять операции над обобщенными функциями, как решать дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций и совершать интегральные преобразования обобщенных функций.</p> <p>Умеет формулировать задачи классического анализа на языке обобщенных функций, обосновывать результат.</p> <p>Владеет методами постановки и решения задач математики и естествознания в пространстве обобщенных функций.</p>

ПК-4

Схема оценки уровня формирования компетенции «Способность публично представлять собственные и известные научные результаты»

Уровень	Показатели (что обучающийся должен продемонстрировать)	Оценочная шкала		
		Удовлетворительно	Хорошо	Отлично
	Знать: условия	Знает условия	Знает условия	Знает условия

П О Р О Г О В Ы Й	<p>применимости теории обобщенных функций к конкретной задаче. Уметь: применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями. Владеть: основными понятиями и методами теории обобщенных функций.</p>	<p>применимости теории обобщенных функций к решению простейших задач. Умеет применять отдельные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики.</p>	<p>применимости теории обобщенных функций к отдельным задачам анализа и математической физики. Умеет применять методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями.</p>	<p>применимости теории обобщенных функций к конкретной задаче. Умеет применять различные методы теории обобщенных функций для решения задач математической физики, представлять отдельные механические и физические величины и законы обобщенными функциями. Владеет основными понятиями и методами теории обобщенных функций.</p>
---	--	---	--	--

Если хотя бы одна из компетенций не сформирована, то положительной оценки по дисциплине быть не может.

7.3. Типовые контрольные задания

7.3.1 Примерные темы рефератов по дисциплине:

- 1) Сверточная алгебра обобщенных функций K'_+ . Уравнения в сверточной алгебре K'_+
- 2) Преобразование Радона обобщенных функций и его применение.
- 3) Преобразование Хартли обобщенных функций и его применение.
- 4) Теория обобщенных функций вещественной переменной (секвенциальный подход).
- 5) Теория обобщенных функций вещественных переменных (секвенциальный подход).
- 6) Свертка и скалярное произведение обобщенных функций (секвенциальный подход).
- 7) Обобщенные функции и ряды Эрмита медленного роста.
- 8) Преобразование Гильберта обобщенных функций и его применения.
- 9) Преобразование Ханкеля обобщенных функций и его применения.
- 10) Пассивные системы и обобщенные функции.

7.3.2 Примерные контрольные вопросы для подготовки к зачету

1. Задачи, приводящие к необходимости введения обобщенных функций.

2. Пространства K^m , K , S основных функций. Сходимость. Примеры. Доказать, что K плотно в S .
3. Доказать, что если $\varphi(x) \in S$, то функции $\varphi^{(n)}(x)$ для любого $n \geq 0$ абсолютно интегрируемы на всей прямой \mathbb{R} .
4. Теорема о существовании основной функции $\varphi \in K$, равной единице на заданном компактном множестве.
5. Определение обобщенной функции. Пространства обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.
6. Равенство обобщенных функций. Носитель о.ф. Умножение о.ф. на бесконечно дифференцируемую функцию.
7. Лемма дю Буа-Реймонда.
8. Линейная замена аргумента в обобщенной функции. Четность дельта-функции Дирака.
9. Производная о.ф. Корректность определения. Линейность и непрерывность. Связь с производной в обычном смысле.
10. Ряды обобщенных функций. Почленная дифференцируемость рядов о.ф.
11. Доказать, что если ряд, составленный из обычных функций, сходится в смысле обобщенных функций на каждом компакте, то его можно почленно дифференцировать любое число раз, и полученные ряды будут сходиться в K' .
12. Пусть $|a_k| \leq A|k|^m + B$ для некоторого $m > 0$ и $\forall k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда тригонометрический ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ сходится в $K'(R)$.
13. Дельтообразные последовательности.
14. Первообразная обобщенной функции. Теорема о существовании.
15. Первообразные высших порядков обобщенных функций. Теорема о существовании.
16. Прямое произведение обобщенных функций. Корректность определения.
17. Доказать, что если $g \in K'(R^m)$, $\varphi \in K(R^{n+m})$, то функция $\varphi(x) = (g(y), \varphi(x, y))$ принадлежит $K(R^n)$, причем справедлива формула $D^\alpha \varphi(x) = (g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y))$.
18. Свойства прямого произведения о.ф.
19. Свертка обычных функций. Случаи существования свертки.
20. Свертка обобщенных функций. Корректность определения и свойства.
21. Теорема о существовании свертки обобщенной функции с основной функцией.
22. Регуляризация обобщенных функций. Плотность пространства K в пространстве обобщенных функций K' .
23. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье функций пространства Шварца. Примеры. Формула обращения преобразования Фурье.
24. Взаимная однозначность и непрерывность преобразования Фурье в пространстве Шварца.
25. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Примеры и свойства.

26. Обратное преобразование Фурье обобщенных функций. Формула обращения.
27. Взаимная однозначность и непрерывность преобразования Фурье в пространстве S' .
28. Преобразование Фурье обобщенных функций с компактным носителем.
29. Преобразование Фурье свертки обобщенных функций.
30. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами в пространстве обобщенных функций и обобщенными неоднородностями.
31. Системы линейных дифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и обобщенными неоднородностями.
32. Обобщенное решение неоднородного дифференциального уравнения на данном множестве.
33. Фундаментальное решение дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.
34. Выражение решения неоднородного уравнения через фундаментальное решение.
35. Метод вариации постоянных нахождения частного обобщенного решения дифференциального уравнения.
36. Фундаментальное решение волнового оператора.
37. Фундаментальное решение оператора теплопроводности.
38. Фундаментальное решение оператора Лапласа.
39. Линейные колебания в механике. Применение обобщенных функций для решения задачи с начальными данными.
40. Решение двухточечной задачи для уравнения колебаний материальной точки.
41. Применение обобщенных функций в методах фильтрации и Фурье-синтеза обращения преобразования Радона.

7.3.3 Примерные варианты контрольных работ по теме «Пространства основных и обобщенных функций»

КР 1

1. Доказать, что функция $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{|ab|}{(x-a)(b-x)}} & \text{при } x \in (a, b), \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b) \end{cases}$ принадлежит основному пространству $K(\mathbb{R})$.
2. Доказать, что если последовательность $\{\varphi_m(x)\}_1^\infty \subset K(\mathbb{R})$ сходится в пространстве K к функции φ , то $a\varphi_n \xrightarrow{K} a\varphi$ для любой бесконечно дифференцируемой функции a .
3. Доказать, что функционал $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ сингулярен.

4. Доказать, что функционалы $\left(\mathbb{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ и $\left(\mathbb{P}\frac{1}{x^2}, \varphi\right) = \text{Vp} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx$ являются обобщенными функциями. Показать, что $\mathbb{P}\frac{1}{x} \cdot x = 1$, $\mathbb{P}\frac{1}{x^2} \cdot x^2 = 1$, $\left(\mathbb{P}\frac{1}{x}\right)' = -\left(\mathbb{P}\frac{1}{x^2}\right)$.
5. Показать, что функционал $(y', \varphi) = \int_0^{\infty} \lambda x^{\lambda-1} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx$ является производной обобщенной функции $y = x_+^{\lambda} = \begin{cases} x^{\lambda} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$.
6. Показать, что: $\theta'(x) = \delta(x)$, $\theta'(x-h) = \delta(x-h)$, $\text{supp } \delta(x-h) = \{h\}$.
7. Доказать, что если ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \delta^{(m)}(x)$ сходится в K' , то все коэффициенты a_m , начиная с некоторого номера, равны нулю.

КР-2

1. Доказать, что функция $\varphi(x) = \begin{cases} \sin^{m+1} \frac{x-a}{b-a} & \text{при } x \in [a, b], \\ 0 & \text{при } x \notin [a, b] \end{cases}$ принадлежит основному пространству $K^m[a, b]$.
2. Доказать, что если последовательность $\{\varphi_m(x)\}_1^{\infty} \subset K(R)$ сходится в пространстве K к функции φ , то $a\varphi_n \rightarrow a\varphi$ для любой бесконечно дифференцируемой функции a .
3. Доказать, что следующие функции стремятся к $\delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$:
- а) $\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$, б) $\frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$.
4. Показать, что функционал $(y', \varphi) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)\theta(1-x)] dx$ является производной обобщенной функции $y = \ln x_+ = \begin{cases} \ln x & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$.
5. Вычислить $\frac{d^3}{dt^3} |t|$.
6. Пусть $g(x)$ – локально интегрируемая функция, $\alpha_k = \text{const}$. Доказать, что равенство (в K') $g(x) + \sum_{k=1}^n \alpha_k \delta(x - x_k) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $g(x) \stackrel{K'}{=} 0$ и $\alpha_k = 0, k=1, \dots, n$.
7. Доказать равенство: $x^n \delta^{(n+k)}(x) = (-1)^n \frac{(n+k)!}{k!} \delta^{(k)}(x)$

КР-3

1. Доказать, что если $\varphi(x) \in S$, то функции $\varphi^{(n)}(x)$ для любого $n \geq 0$ абсолютно интегрируемы на всей прямой \mathbf{R} .
2. Доказать, что для того чтобы для функции $\varphi \in K$ существовала $\psi \in K$ такая, что $\varphi = \psi'$ необходимо и достаточно, чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = 0$.
3. Доказать, что следующие функции стремятся к $\delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$:
а) $\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$, б) $\frac{1}{\pi \varepsilon x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}$.
4. Доказать, что если $f_n(x) = \cos nx$, то $f_n^{(k)} \rightarrow 0$, $\forall k \geq 0$.
5. Вычислить: а) $\frac{d}{dx} \{x\}$, где $\{x\}$ - дробная часть x ; б) $\frac{d}{dx} [x]$, где $[x]$ - целая часть x ; в) $\frac{d}{dx} \theta(1 - |x|)$.
6. Разложив функцию $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4\pi}$ в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi]$ и дважды продифференцировав полученный ряд, доказать формулу
$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$
7. Пусть $|a_k| \leq A|k|^m + B$ для некоторого $m > 0$ и $\forall k = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$. Доказать, что тогда тригонометрический ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikx}$ сходится в $K'(R)$.

7.3.4 Примерные варианты контрольных работ по модулю «Преобразование Фурье обобщенных функций»

КР-1

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $F[\theta(1 - |x|)x](\xi)$.
2. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}$.
3. В пространстве обобщенных функций найти общее решение дифференциального уравнения $y' + xy = \delta$.

КР-2

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $F\left[\text{sign} \frac{x-1}{2}\right](\xi)$.

2. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} + 1$.
3. В пространстве обобщенных функций найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = x_+$.

КР-3

1. Найти преобразование Фурье обобщенной функции $F\left[P\frac{1}{(x+1)^2}\right](\xi)$.
2. Найти общее обобщенное решение дифференциального уравнения $xf' = \text{sign } x + \delta$.
3. Найти фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 2$.

7.3.5 Примерные задания тестов

Тест №1

1. Какие из приведенных ниже функционалов f являются обобщенными функциями (из K'):
 - 1) $(f, \varphi) = \int_{-1}^{\infty} \varphi(x) dx$; 2) $(f, \varphi) = \varphi(0) + 1$; 3) $(f, \varphi) = |\varphi(1)|$;
 - 4) $(f, \varphi) = \varphi'(0)$; 5) $(f, \varphi) = \varphi(0) - \varphi'(-1)$; 6) $(f, \varphi) = \varphi(0) \cdot \varphi'(0)$.
2. Вычислить: $x\delta(x)$.
 - 1) 1; 2) x^2 ; 3) 0; 4) $\theta(x)$.
3. Вычислить значения функционала $\delta(-x)$ на функциях $\varphi(x) \in K$.
 - 1) $\varphi(0)$; 2) $-\varphi(0)$; 3) $\varphi(1)$; 4) $-\varphi(1)$.
4. Вычислить пределы в K' последовательности $f_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{\text{ch } nx}$ обобщенных функций при $n \rightarrow \infty$.
 - 1) $\delta(x)$; 2) 0; 3) 1; 4) 2π .
5. Пусть $f_n(x) = \cos nx$. Чему равен предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$ в пространстве обобщенных функций.

- 1) 0; 2) не существует; 3) 1; 4) $\sin x$.
6. Вычислить $x\delta^{(4)}(x)$.
- 1) $-4\delta^{(3)}(x)$; 2) $3\delta^{(3)}(x)$; 3) 0; 4) $-4\delta^{(5)}(x)$
7. Вычислить $\theta(x)*x_+^3$.
- 1) $\frac{1}{4}x_+^4$; 2) $4x_+^4$; 3) свертка не определена; 4) 0.
8. Найти преобразование Фурье $F[\delta(x-2)](\xi)$.
- 1) $e^{-2i\xi}$; 2) $e^{2i\xi}$; 3) $e^{-2\xi}$; 4) $e^{2\xi}$.
9. Найдите фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d}{dt} - 1$.
- 1) $\theta(t)e^t$; 2) $\theta(t)e^{-t}$; 3) $\delta(t)$; 4) e^{-it} .
10. Выберите фундаментальное решение волнового оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.
- 1) $\frac{1}{2}\theta(t-|x|)$; 2) $\frac{1}{2}\theta(t+|x|)$; 3) $2\theta(t-|x|)$; 4) $-\frac{1}{4\pi|x|}$.

7.4. Методические материалы, определяющие процедуру оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

Общий результат выводится как интегральная оценка, складывающаяся из текущего контроля – 50% и промежуточного контроля – 50%.

Текущий контроль по дисциплине включает:

- посещение занятий – 10 баллов,
- участие на практических занятиях – 10 баллов,
- коллоквиум – 40 баллов,
- выполнение аудиторных контрольных работ – 40 баллов.

Промежуточный контроль по дисциплине включает:

- устный опрос – 50 баллов,
- письменная контрольная работа – 50 баллов.

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная литература:

- 1) Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
- 2) Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. 1979.
- 3) Гельфанд И. М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции. М.: Физматгиз, Вып. 1-3, 1958.
- 4) Кеч В., Теодореску П.. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М: Мир, 1978.
- 5) Шиллов Г.Е. Математический анализ. Второй спец. курс. М.: Изд. МГУ, 1984.

б) дополнительная литература:

- 6) Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982.
- 7) Берман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразование Фурье. М.: Мир, 1968.
- 8) Владимиров В.С. Обобщенные функции и их применение. Математика и кибернетика, подписная научно-популярная серия, №1. «Знание», 1990.
- 9) Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: «Высшая школа», 1975.
- 10) Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 2004.
- 11) Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976.

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

1. 2319 http://window.edu.ru/window/catalog?p_rubr=2.2.74.12

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины.

Язык обобщенных функций (или распределений, как их еще называют в литературе) является основным языком многих современных направлений математики. Дисциплина «Обобщенные функции» способствует выработке этого языка у будущих бакалавров. Поэтому творческое овладение этой дисциплиной особенно важно для тех, кто собирается продолжить учебу в магистратуре и аспирантуре по различным направлениям. Специфика дисциплины состоит в том, что здесь подвергаются пересмотру такие базовые понятия классического анализа, как предел, производная и др. Обобщение этих понятий не только расширяет круг решаемых задач, но и значительно упрощает решение этих задач, автоматизируя многие математические операции.

Систематическое изложение научных материалов, освещение главных тем данной дисциплины проводится в ходе лекционного курса. Изучение теоре-

тического курса выполняется самостоятельно каждым студентом по итогам каждой из лекций, используя конспект (электронный) лекций, учебники, представленные в разделе 8 «Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины», результаты контролируются преподавателем на практических занятиях.

Если возникают вопросы, следует обратиться на кафедру к преподавателю, согласно графику консультаций ведущего преподавателя. Обращаясь за консультацией, необходимо указать, каким учебником пользовались и какой раздел, глава, параграф вам не понятен.

Решения задач и самостоятельные работы по заданию (индивидуальному, где требуется) преподавателя сдаются в конце каждой зачетной единицы.

Для сдачи зачетной единицы «Дифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций» необходимо проанализировать лекционный материал с использованием источников литературы, предварительно повторить темы «Дифференциальные уравнения высокого порядка» и «Системы линейных дифференциальных уравнений».

Для подготовки к практическим занятиям нужно изучить соответствующий теоретический материал из следующих литературных источников, рекомендованных в п. 8: [1], [2], [5], [6], [10].

Решать задачи и упражнения из учебных пособий и задачников: [1], [5], [6].

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине: «Обобщенные функции» необходимы:

Системное программное обеспечение: ОС Windows 7/8/10;

Прикладное программное обеспечение: MSOffice 2007/2010/2013;

Сетевые приложения: электронная почта, поисковые системы Google, Yandex.

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.

Для проведения лекционных занятий на факультете необходима аудитория на 25-35 мест, оборудованная ноутбуком, экраном и цифровым проектором.